SISTEMI LINEARI

In queste note faremo alcune osservazioni sui sistemi lineari

COSA È UN SISTEMA LINEARE

Iniziamo con un esempio di un sistema lineare di due equazioni nelle variabili x_1, x_2:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

Più in generale un sistema di m equazioni nelle n variabili $x_1, \dots, x_n$ è un sistema della forma

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_n \end{cases}$$

dove a_{ij} e b_i sono dei numeri fissati.

Possiamo riscrivere le equazioni che definiscono un sistema lineare usando il linguaggio delle matrici o quello delle applicazioni lineari.

Per esempio nel caso del primo sistema poniamo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Allora il sistema si può riscrivere in forma apparentemente più compatta come

$$A \cdot x = b$$

o equivalentemente

$$L_A(x) = b$$

La stessa cosa possiamo farla nel caso del secondo sistema ponendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matrice $m \times n$, A si chiama la matrice associata al sistema e la matrice $m \times (n+1)$

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} & b_1 \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

si chiama la matrice completa associata al sistema

Nello studio dei sistemi lineari ci proponiamo i seguenti obiettivi:

- chiarire cosa vuol dire risolvere un sistema
- capire quando un sistema ha soluzione e dire quante sono le soluzioni
- dare un metodo per risolvere un sistema

COSA VUOL DIRE RISOLVERE UN SISTEMA

Se ho un sistema di m equazioni in n incognite

$$A x = b$$

risolverlo vuol dire calcolare tutte le $x \in K^n$ che verificano l'equazione.

Iniziamo con un esempio nel quale la soluzione è unica.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

posso ricavare x_1 dalla seconda equazione e sostituendo ricavo

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 \\ 6 - x_2 = 1 \end{cases}$$

ricavo quindi

$$\begin{cases} x_2 = 5 \\ x_1 = -8 \end{cases}$$

Quindi il sistema ha un'unica soluzione $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

La stessa situazione si verifica tutte le volte che la matrice A è invertibile. Infatti se A è invertibile da $Ax = b$ possiamo ricavare $x = A^{-1} b$.

In alcuni casi però il sistema non ha un'unica soluzione ma ne ha infinite. In questi casi non possiamo elencare tutte le soluzioni, però possiamo descriverle in modo trasparente. Iniziamo con un esempio. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Se ricavo x_1 dalla seconda equazione e sostituisco ottengo

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 - x_4 \\ -x_2 - 5x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

se ora ricavo x_2 dalla 2^a equazione e sostituisco nella 1^a

$$(*) \quad \begin{cases} x_2 = -5x_3 - x_4 - 1 \\ x_1 = 7x_3 + x_4 + 2 \end{cases}$$

Scritto in questo modo le soluzioni sono chiare: x_3, x_4 le possiamo far variare liberamente e x_1, x_2 le calcoliamo mediante le formule (*). Per esempio

per $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ otteniamo che $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione

per $x_3 = 2$ $x_4 = 1$ otteniamo $\begin{pmatrix} 17 \\ -12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione e così via

L'insieme di tutte le soluzioni è perciò

$$\left\{ \begin{pmatrix} 7x_3 + x_4 + 2 \\ -5x_3 - x_4 - 1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in K \right\}$$

Una volta che abbiamo riscritto il sistema originale nella forma

$$(**) \quad \begin{cases} x_2 = -5x_3 - x_4 - 1 \\ x_1 = 7x_3 + x_4 + 2 \end{cases}$$

chiamiamo x_3, x_4 variabili libere e x_1, x_2 variabili dipendenti.

Possiamo riscrivere (**) anche in questa forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In generale se abbiamo un sistema $Ax = b$ vogliamo raggiungere un obiettivo simile: stabilire se ha soluzione e se ha soluzione individuare delle variabili libere, $x_{j_1} \dots x_{j_k}$, e delle variabili dipendenti, $x_{i_1} \dots x_{i_\ell}$ nelle quali il sistema si riscrive nella forma

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_\ell} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_k} \end{pmatrix} + d$$

dove C è una matrice $\ell \times k$ e $d \in K^\ell$.

SISTEMI OMOGENEI E SISTEMI NON OMOGENEI

Se il sistema è della forma

$$A \cdot x = 0$$

il sistema si dice omogeneo e le soluzioni sono il nucleo di L_A. Invece il sistema si dice non omogeneo se è della forma $Ax = b$ con $b \neq 0$. e in tal caso l'equazione omogenea associata è $A \cdot x = 0$

PROPOSIZIONE

Si consideri il sistema

$$A \cdot x = b$$

con A matrice $m \times n$ $b \in K^m$ e $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ l'incognita.

1) Il sistema ha soluzione se e solo se $b \in \operatorname{Im} L_A$

2) Se v è una soluzione del sistema allora le altre soluzioni del sistema si ottengono sommando a v un elemento del nucleo di L_A.

$$\{ x \in K^n : A \cdot x = b \} = v + N(L_A)$$

dim

1) $$\operatorname{Im} L_A = \{ L_A(v) : v \in K^n \} = \{ A \cdot v : v \in K^n \}$$

quindi $b = A \cdot v$ per qualche v se e solo se $b \in \operatorname{Im} L_A$

2) Se $A \cdot v = b$ allora il sistema

$$A \cdot x = b$$

si può riscrivere come

$$A \cdot x = A \cdot v$$

ovvero

$$A \cdot (x - v) = 0$$

quindi $A \cdot x = 0$ se e solo se $x - v \in N(L_A)$

ovvero $x = v + N(L_A)$

#

SISTEMI OMOGENEI E BASE DEL NUCLEO

Soffermiamoci ora nel caso dei sistemi omogenei.

$$A \cdot x = 0$$

Per rendere la discussione più concreta supponiamo che il sistema sia in 5 variabili. Supponiamo di poterlo risolvere e che x_2, x_4, x_5 siano le variabili libere e x_1, x_3 siano le dipendenti. Abbiamo quindi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + d$$

con C 2×3 e $d \in K^3$. Inoltre poiché $x = 0$ è una soluzione del sistema deve essere $d = 0$. Quindi abbiamo

$$x \in N(L_A) \iff A \cdot x = 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Una volta scritto in questa forma è molto facile scrivere una base del nucleo di L_A nel seguente modo:

- poniamo $x_2 = 1$ $x_4 = 0$ $x_5 = 0$ otteniamo $x_1 = c_{11}$ $x_3 = c_{21}$

  ovvero

  $$v_1 = e_2 + c_{11} e_1 + c_{31} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ 1 \\ c_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N(L_A)$$

- similmente poniamo $x_2 = 0$ $x_4 = 1$ $x_5 = 0$ e otteniamo $x_1 = c_{12}$ $x_3 = c_{22}$

  e $v_2 = e_4 + c_{12} e_1 + c_{22} e_3 \in N(L_A)$

- infine poniamo $x_2 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0$ e otteniamo

$$v_3 = e_5 + c_{13} e_1 + c_{23} e_3$$

v_1, v_2, v_3 sono una base di $N(L_A)$. Infatti se $v \in N(L_A)$, mostriamo che lo possiamo scrivere in modo unico come combinazione lineare: $v = a v_1 + b v_2 + c v_3$.

Se $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_5 e_5$ e $v \in N(L_A)$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}$$

Osserviamo inoltre che $a v_1 + b v_2 + c v_3 = x e_1 + a e_2 + y e_3 + b e_4 + c e_5$ con

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

quindi $v = a v_1 + b v_2 + c v_3$ se e solo se $a = \alpha_2 \quad b = \alpha_4 \quad c = \alpha_5$.

Lo stesso metodo funziona per ogni sistema per il quale siano state individuate delle variabili libere. In particolare abbiamo la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE Sia A $m \times n$ e supponiamo di aver risolto il sistema $Ax = 0$ individuando h variabili dipendenti e k variabili libere. Allora $N(L_A)$ ha una base fatta di k vettori.

SISTEMI A SCALINI

Una matrice si dice a scalini se ad ogni riga il primo elemento diverso da zero è sempre più a destra. Per esempio la matrice A è a scalini mentre B e C non lo sono:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ho cerchiato le entrate che rendono la matrice non a scalini. Nella matrice A invece ho riquadrato le prime entrate diverse da zero di ogni riga. questi entrate si chiamano i PIVOT della matrice.

Quando una matrice è a scalini è facile dire se il sistema $Ax = b$ ha soluzione e dire quali saranno le variabili libere e le variabili dipendenti. Facciamo il caso della matrice A scritta sopra e di un vettore $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{pmatrix}$ generico.

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \boxed{x_2} + 2x_3 + 3x_4 + 3x_6 = b_1 \\ \boxed{x_4} + 5x_5 = b_2 \\ \boxed{x_5} = b_3 \\ 0 = b_4 \end{cases}$$

dove ho riquadrato le entrate corr. ai PIVOT.

Vediamo subito che per avere soluzione deve essere $b_4 = 0$. Viceversa se $b_4 = 0$, possiamo ricavare

x_5 dalla terza equazione e sostituirlo nelle precedenti, ricavare x_4 dalla seconda e sostituirlo nelle precedenti e ricavare x_2 dalla prima equazione.

Nel caso specifico otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = -2x_3 - 3x_6 + b_1 - 3b_2 + 15 b_3 \\ x_4 = b_2 - 5b_3 \\ x_5 = b_3 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 - 3b_2 + 15 b_3 \\ b_2 - 5b_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Questo metodo nel caso di un sistema a scalini funziona sempre. Per riassumere questa osservazione introduciamo una definizione.

DEFINIZIONE Se A è una matrice a scalini il rango di A è il numero delle righe diverse da zero o equivalentemente il numero di PIVOT.

PROPOSIZIONE Se A è una matrice a scalini $m \times n$ di rango R allora

1) Se $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ il sistema $Ax = b$

ha soluzione se e solo se $b_{R+1} = \dots = b_m = 0$

2) Se il sistema ha soluzione possiamo individuare le variabili dipendenti come

le variabili corrispondenti ai PIVOT e le variabili libere come le rimanenti.

RIDUZIONE A SCALINI

Illustreremo un metodo per trasformare un sistema qualsiasi in un sistema a scalini. Questo metodo è efficiente quando si devono risolvere sistemi con tante equazioni e tante incognite, inoltre per noi avrà qualche importanza teorica.

Se abbiamo un sistema $Ax = b$ ovvero

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

possiamo considerare le seguenti trasformazioni che non cambiano le soluzioni del sistema

R_{ij} : possiamo scambiare la riga i con la riga j

$R_i(\lambda)$: possiamo moltiplicare la riga i-esima per un numero $\lambda \neq 0$

$R_{ij}(\alpha)$: possiamo sommare alla riga i-esima, α volte la riga j-esima.

Illustriamo ora come possiamo utilizzare queste trasformazioni per risolvere un sistema con un esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

È conveniente invece di riscrivere tutte le volte l'intero sistema scrivere solo la matrice completa e operare sulle righe di questa matrice

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 1 & 4 \end{matrix}$$

Parto dalla prima colonna. Se fosse fatta tutta di zero passerei alla seconda colonna. Nel nostro caso non è zero e faccio in modo che l'entrata più in alto sia diversa da zero. Nel nostro caso è 1, quello che ho cerchiato. Questo sarà il primo pivot.

La prima colonna però non può essere la colonna di una matrice a scalini per la presenza delle due entrate diverse da zero evidenziate. Allora sommo alla terza e alla quarta riga un opportuno multiplo della prima riga per "cancellare" queste entrate.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 1 & 4 \end{matrix} \xrightarrow{R_{31}(-1)} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 1 & 4 \end{matrix} \xrightarrow{R_{41}(-2)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{R_{23}}$$

A questo punto la prima riga e la prima colonna sono sistemate. Ora passo ad operare sulla seconda colonna.

Nel nostro caso le entrate evidenziate rendono la matrice non a scalini, perché se c'è una entrata diversa da zero deve stare nella seconda riga. Allora le scambio.

Continuo così: ad ogni passaggio ho evidenziato l'entrata da conseguire e ho cerchiato i PIVOT che via via si sono formati.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{R_{42}(-1)} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{R_{43}(-1)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -2 \end{matrix}$$

Ho così trasformato un sistema in uno a scalini. Nel nostro caso posso dire che il sistema ha soluzione e ha x_5 come unica variabile libera. Lo stesso metodo funziona in generale e per fare questo è chiaro bastano le trasformazioni R_{ij} e $R_{ij}(\alpha)$.

Se vogliamo scrivere le soluzioni del sistema invece di ricavare le variabili e sostituire possiamo continuare e ridurre la matrice in modo che

- tutti i pivot siano uguali a 1
- Le entrate sopra i pivot siano zero

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -2 \end{matrix} \xrightarrow{R_4(-1)} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{R_{24}(-1)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{R_{14}(-2)} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{R_{23}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

A questo punto il sistema è

$$\begin{cases} x_1 - 4x_5 = -3 \\ x_2 - 5x_5 = -2 \\ x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_4 + 4x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 = 4x_5 - 3 \\ x_2 = 5x_5 - 2 \\ x_3 = -2x_5 + 2 \\ x_4 = -4x_5 + 2 \end{cases}.$$

MATRICI DI RANGO MASSIMO

Sia B una matrice a scalini $m \times n$.

Da quanto osservato in precedenza otteniamo

1) $\text{rango}\, B = m$ se e solo se $\forall\, b \in K^m$ il sistema $Bx = b$ ha soluzione

2) $\text{rango}\, B = n$ se e solo se non ci sono variabili libere ovvero il sistema $Bx = 0$ ha come unica soluzione $x = 0$.

Ora estendiamo questa osservazione al caso di matrici qualsiasi

PROPOSIZIONE

Sia A una matrice $m \times n$ e $\hat{A}$ una sua riduzione a scalini

1) $A = 0$ se e solo se $\hat{A} = 0$

2) Sono equivalenti:

   a) $Ax = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$
   b) $\hat{A}$ ha rango n

3) Sono equivalenti

   a) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione $\forall\, b \in K^m$
   b) $\hat{A}$ ha rango m

dim

1) è ovvio

2) Osserviamo che $Ax = 0$ e $\hat{A}x = 0$ hanno le stesse soluzioni quindi la condizione a) è equivalente alla condizione $\hat{A}x = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$. Come osservato questo vuol dire rango $\hat{A} = n$

3) Osserviamo che ogni sistema $Ax = b$, mediante il processo di riduzione a scalini si trasforma in un sistema $\hat{A}x = c$. Viceversa percorrendo all'inverso i passaggi della riduzione a scalini ogni sistema $\hat{A}x = c$ si trasforma in un sistema $Ax = b$. Quindi la condizione a) è equivalente alla condizione $\hat{A}x = c$ ha soluzione $\forall\, c \in K^m$. Come osservato in precedenza questo è equivalente alla condizione rango $\hat{A} = m$

#

Osserviamo che le condizioni nel punto 2) e 3) sono indipendenti da come abbiamo ridotto A a scalini questo vuol dire che se $\hat{A}$ e $\tilde{A}$ sono due diverse riduzioni della matrice A a scalini allora

rango $(\hat{A}) = m$ se e solo se rango $(\tilde{A}) = n$ e

rango $(\hat{A}) = n$ se e solo se rango $(\tilde{A}) = n$.

DEFINIZIONE

Sia A una matrice $m \times n$ e sia $\hat{A}$ una sua riduzione di A a scalini. Poniamo rango $A = m$ se rango $\hat{A} = m$ e rango $A = n$ se rango $\hat{A} = n$.

OSS. Tra poco daremo questa definizione più in generale nel caso di un rango qualsiasi, prima però diamo un'applicazione della proposizione precedente allo studio delle matrici invertibili.

MATRICI INVERTIBILI

La proposizione appena dimostrata ci permette di capire meglio quali siano le matrici invertibili.

PROPOSIZIONE

1) Sia A una matrice $m \times n$. Se A è invertibile allora $m = n$ e rango $(A) = n$

2) Sia A una matrice $n \times n$ di rango n allora A è invertibile

dim

1) Se A è invertibile allora $\forall b$ il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione, quindi

rango $(A) = n$ (perché $Ax = 0$ ha un'unica sol)

rango $(A) = m$ (perché $Ax = b$ ha sempre soluzione) quindi $n = m = \text{rango}(A)$

2) Sia A $n \times n$ e sia $\text{rango}(A) = n$.

Allora $Ax = b$ ha sempre soluzione.

Sia v_i tale che

$$A v_i = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Poniamo allora $B = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ la matrice le cui colonne sono $v_1 \; v_2 \cdots v_n$.

Allora $A \cdot B$ ha colonne $(A v_1, \ldots, A v_n)$

quindi

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A v_1, & \ldots, & A v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Ho trovato una matrice B tale che $A \cdot B = I_n$, ora verifico $C = B \cdot A = I$.

Siano $c_1 \ldots c_n$ le colonne di $B \cdot A$.

Voglio dimostrare $c_i = e_i$.

Osservo che $A \cdot C = (AB) \cdot A = I \cdot A = A$

Quindi

$$A c_i = a_i \quad \text{l'i-esima colonna di } A$$

ma anche

$$A e_i = a_i.$$

e sappiamo che la soluzione del sistema $Ax = b$ è unica quindi deve essere $c_i = e_i$ #

Quindi le matrici invertibili sono le matrici quadrate di rango massimo.

<u>Esercizio</u>

Dire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Soluzione: Calcoliamo il rango riducendo a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi il rango è 3 e la matrice è invertibile

Possiamo utilizzare il metodo di ridurre una matrice a scalini non solo per stabilire se una matrice è invertibile ma anche per calcolare l'inversa.

Facciamo l'esempio della matrice di prima

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

noi vogliamo calcolare B con colonne v_1 v_2 v_3 tale che $AB = I$, ovvero

$$Av_1 = e_1 \qquad Av_2 = e_2 \qquad Av_3 = e_3$$

Invece di studiare un sistema alla volta li studiamo tutti insieme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A} \qquad e_1 \quad e_2 \quad e_3$$

Riduciamo a scalini $\Big\downarrow$ $R_{21}(-2)$ e $R_{31}(-3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Big\downarrow$ $R_{32}(-1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ora abbiamo ridotto a scalini ma per calcolare le soluzioni non vogliamo solo ridurre A a scalini ma anche per diventare i pivot uguali a 1 e annullare le entrate sopra i pivot

Applico quindi $R_3(-1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \; R_{23}(4) \text{ e } R_{13}(-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Quindi i sistemi iniziali

$$A v_1 = e_1 \qquad A v_2 = e_2 \qquad A v_3 = e_3$$

sono equivalenti a

$$I \cdot v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad I v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad I v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

In altre parole si parte dalla situazione

$$(A \mid I)$$

e riducendo a scalini trovo

$$(I \mid B)$$

Allora $\quad AB = I \quad$ ovvero $\quad B = A^{-1}$

#

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA LINEARE

TEOREMA Siano $v_1; \dots; v_n$ e $w_1 \dots w_m$ due basi dello spazio vettoriale V. Allora $n = m$

dim.

Sia $\quad A = [I_1]^{v}_{w} \quad$ e $\quad B = [I_1]^{w}_{v}$

A è $m \times n$ e B è $n \times m$. Sappiamo anche che $A \cdot B = I_m$ e $B \cdot A = I_n$ quindi A e B sono invertibili. Quindi $n = m$ #

DEFINIZIONE Se $v_1 \dots v_n$ è una base di V diciamo che $\dim V = n$

Torneremo su questo concetto nella prossima sessione. Prima vogliamo applicarlo al caso dei sistemi lineari.

RANGO DI UNA MATRICE E ROUCHÉ - CAPELLI

Sia A una matrice $l \times m$ e siano B e C due sue riduzioni a scalini.
Sia B con b pivot e C con c pivot.
Da una osservazione precedente ricaviamo che $N(L_A)$ ha una base fatta da $m-b$ vettori e una base fatta da $m-c$ vettori.
Dal teorema fondamentale ricaviamo quindi $m-b = m-c$ e quindi $b = c$.

DEFINIZIONE Sia A una matrice $m \times n$ e sia $\hat{A}$ una riduzione a scalini di A. Definisco il rango di A come il numero di righe diverse da zero di $\hat{A}$ o equivalentemente il numero di PIVOT di $\hat{A}$.

PROPOSIZIONE (Teorema di Rouché - Capelli)
Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in K^m$

1) Il sistema ha soluzione se e solo se

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A\,b)$$

2) Se il sistema ha soluzione allora ci sono

$$n - \text{rango}(A)$$ variabili libere

dim Sia $R = $ rango(A). Se riduciamo il sistema a scalini, l'equazione si trasforma nel sistema $\hat{A}x = c$ dove

rango A = rango $\hat{A}$ = n° di righe diverse da zero di $\hat{A}$

e $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ e rango $(A\ b)$ = rango (A) se

e solo se $c_{R+1} = \dots = c_m = 0$. Quindi i due enunciati sono una riformulazione della proposizione enunciata per i sistemi a scalini. #