Compito di Geometria e algebra lineare di venerdì 7 gennaio 2021

Istruzioni: Avete 2 ore e 40 minuti di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Siano $F : U \longrightarrow V$ e $G : V \longrightarrow W$ due applicazioni lineari.

a) Si dimostri che se $G \circ F$ è iniettiva allora F è iniettiva.
b) Si enunci il teorema della dimensione.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leqslant 3}$ e sia U il sottospazio dei polinomi $p(t) \in V$ tali che $p(1) = 0$. Sia $F : U \longrightarrow V$ definita da $F(p) = tp'(t)$. Sia $G : V \longrightarrow V$ l'applicazione lineare tale che:

$$G(p) = F(p) \quad \text{se } p \in U \quad \text{e} \quad G(1) = 4 + t + t^2.$$

a) Si descriva una base dell'immagine di F.
b) Si calcoli il determinante di G.

Esercizio 3. Si consideri il piano π di equazione $x + y + z = 1$ e la retta ℓ di equazioni $x = y = 1$.

a) Si calcolino le equazioni della proiezione ortogonale ℓ' di ℓ su π.
b) Si determini un piano π' a distanza uno da ℓ e da ℓ'.

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Su V consideriamo il prodotto scalare

$$b(A, B) = Tr(A \cdot B).$$

(1) Si calcoli la segnatura di b.
(2) L'insieme dei vettori isotropi rispetto al prodotto scalare b è uno sottospazio vettoriale di V?

1. Soluzioni del compito del 7 gennaio 2021

Soluzione esercizio 1. a) se $F(x) = F(y)$ allora $G(F(x)) = G(F(y))$ ed essendo $G \circ F$ iniettiva questo implica $x = y$.

b) Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e sia V di dimensione finita. Allora $\dim V = \dim N(F) + \dim Im(F)$.

Soluzione esercizio 2. a) L'applicazione F è iniettiva, infatti se $tp'(t)$ è polinomio nullo allora $p'(t) = 0$ e quindi $p = c$ è un polinomio costante. Ma l'unico polinomio costante che sta in U è zero. Quindi $N(F)$ è il solo polinomio nullo. Quindi l'immagine di una base di U è una base dell'immagine. Una base di U è data da $t - 1$, $t^2 - 1$, $t^3 - 1$ e quindi una base dell'immagine è t, $2t^2$, $3t^3$. Eliminando le costanti possiamo anche scegliere come base t, t^2 e t^3.

b) Scrivo la matrice associata a G rispetto alla base standard in partenza e in arrivo. Per calcolare $G(t^3)$ osserviamo che $t^3 = (t^3 - 1) + 1$ e che l'addendo $t^3 - 1$ è in U, per linearità, ricaviamo che

$$G(t^3) = F(t^3 - 1) + G(1) = 3t^3 + 4 + t + t^2.$$

Similmente otteniamo $G(t^2) = F(t^2-1)+G(1) = 2t^2+4+t+t^2 = 4+t+3t^2$ e $G(t) = F(t-1)+G(1) = 4+2t+t^2$ e infine $G(1) = 4 + t + t^2$. Quindi

$$[G]^{1,t,t^2,t^3}_{1,t,t^2,t^3} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Quindi sottraendo la prima colonna alla seconda, terza e quarta otteniamo

$$DetG = Det \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = Det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 24.$$

Soluzione esercizio 3. a) L'intersezione tra la retta ℓ e il piano π è il punto $P = (1, 1, -1)$. La retta ℓ' è l'intersezione del piano π e del piano π' contenente la retta ℓ e la retta ortogonale a π passante per P ovvero la retta $P + \mathbb{R}(1, 1, 1)$. Questo è il piano $x = y$, infatti tale piano contiene evidentemenre sia la retta ℓ che la retta $P + \mathbb{R}(1, 1, 1)$. Quindi la retta ℓ' ha equazioni $x = y$ e $x + y + z = 1$.

b) Consideriamo il piano contente le rette ℓ e ℓ'. Equivalentemente questo è il piano contenente le rette ℓ e $P + \mathbb{R}(1, 1, 1)$. Come visto nel punto precedente questo è il piano π' di equazione $x = y$. Noi cerchiamo un piano parallelo a questo e a distanza 1 da questo. Un piano parallelo a questo ha equazione $x = y + a$. La distanza di un tale piano dal piano $x = y$ è uguale alla distanza del piano $x = y + a$ dall'origine. Per calcolare tale distanza tracciamo l'ortogonale al piano $x = y$ passante per l'origine. Questa e' la retta $\mathbb{R}(1, -1, 0)$ che interseca il piano $x = y + a$ nel punto $(a/2, -a/2, 0)$. Quindi la distanza è $|a|/\sqrt{2}$. Quindi ci sono due piani che hanno la proprietà cercata: $x = y \pm \sqrt{2}$.

Soluzione esercizio 4. a) Se $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ è un matrice 2×2 ricaviamo che $b(A, A) = a^2 + 2bc + d^2$. Quindi la matrice associata a b rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha determinante -1 quindi le segnature possibili sono $(3, 1, 0)$ e $(1, 3, 0)$. Inoltre l'indice di positività è almeno 2, come si vede dalla restrizione di b al sottospazio delle matrici diagonali (ovvero il sottospazio generato dal primo e dall'ultimo vettore della base canonica), quindi la segnatura è $(3, 1, 0)$.

b) No, infatti dal calcolo effettuato al punto precedente vediamo che una matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ è un vettore isotropo di V se e solo se $a^2 + 2bc + d^2 = 0$. In particolare per $a = d = b = 0$ e $c = 1$ otteniamo una matrice B che è un vettore isotropo, e per $a = d = c = 0$ e $b =$ otteniamo un secondo vettore isotropo che indichiamo con C. La loro somma invece è la matrice $a = d = 0$ e $b = c = 1$ che non è un vettore isotropo.