Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 24 gennaio 2021

Istruzioni: Avete 2 ore e 20 minuti di tempo a disposizione. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Argomentare in modo chiaro le risposte, esercizi illeggibili non verranno presi in considerazione.

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = (1,0,0,1) \qquad u_2 = (0,1,1,0) \qquad u_3 = (1,8,-1,7)$$

Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_4)u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$$

e sia $G : U \longrightarrow U$ la restrizione di F a U ovvero $G(u) = F(u)$ per ogni $u \in U$.

a) dire se G è diagonalizzabile.
b) dire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$

$$O = (0,0,0) \qquad P = (1,0,0) \qquad Q = (1,1,0)$$

$$A = (1,-1,0) \qquad B = (1,1,0) \qquad C = (1,2,1) \qquad D = (1,-2,-1).$$

a) Si scriva una trasformazione affine $f(x) = Ax + b$ che porta la retta OP nella retta AB e la retta OQ nella retta CD.
b) Esiste un'isometria (lineare o affine) che porta la retta OP nella retta AB e la retta OQ nella retta CD?

Esercizio 3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri il prodotto scalare b_k di $\mathbb{R}^4$ che rispetto alla base standard ha come matrice associata la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & k(k-1) & 0 \\ k-1 & 0 & k(k-1) & 0 \\ k(k-1) & k(k-1) & k & k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si calcoli la segnatura di b_k al variare di k.
b) Si calcoli la dimensione dell'ortogonale di del sottospazio generato da e_1 ed e_2 al variare di k.

Soluzioni del compito del 28 gennaio 2022

Soluzione esercizio 1. a) Calcoliamo la matrice associata a G rispetto alla base u_1, u_2, u_3. Abbiamo

$$[G]^{u_1,u_2,u_3}_{u_1,u_2,u_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico e' quindi $(t-2)(t^2-9)$ quindi G ha tre autovalori distinti, $2, 3, -3$ e pertanto è diagonalizzabile. Siano v_1, v_2, v_3 autovettori relativi a questi autovalori

b) Osserviamo che l'immagine di F è contenuta in U e pertanto, per il teorema della dimensione $N(F) \neq \{0\}$. Sia $v_4 \neq 0$ un vettore del. Allora v_1, v_2, v_3, v_4 sono autovettori relativi agli autovalori $2, 3, -3, 0$, quindi sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di $\mathbb{R}^4$ e pertanto anche F è diagonalizzabile.

Soluzione esercizio 2. a) Osserviamo intanto che le rette AB e CD si intersecano nel punto $E = (1,0,0)$. Traslando le rette di $-E$ otteniamo le rette per l'origine generate da $u = \vec{EB} = (0,1,0)$ e $v = \vec{EC} = (0,2,1)$.

Se L è una applicazione lineare che porta e_1 in u e $e_1 + e_2$ in v allora L porta OP nella retta $\mathbb{R}u$ e OQ nella retta $\mathbb{R}v$ e quindi $F(x) = L(x) + E$ porta OP in AB e OQ in CD.

Osserviamo che esistono infinite applicazioni L con le proprietà cercate. Osserviamo infatti che $L(e_2) = L(e_1 + e_2 - e_1) = v - u$ e che il valori di e_3 lo possiamo scegliere liberamente. Poniamolo uguale a 0. Quindi $L = L_A$ per A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $F(x) = Ax + E$ con $E = (1,0,0)$

b) Una tale isometria non esiste infatti l'angolo che formano le rette AB e CD è diverso dall'angolo che formano le rette OP e OQ. Calcoliamo il coseno di tali angoli:

$$\cos(\widehat{BED}) = \frac{\vec{EB} \cdot \vec{ED}}{\|\vec{ED}\|\|\vec{ED}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos(\widehat{POQ}) = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OQ}}{\|\vec{OP}\|\|\vec{OQ}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che sono due numeri diversi.

Soluzione esercizio 3. a) Il determinante della matrice A_k è uguale a $k^2(k-1)^2$. Quindi per $k \neq 0,1$ è un numero strettamente positivo e le segnature possibili sono $(4,0,0)$, $(0,4,0)$ e $(2,2,0)$. Osserviamo inoltre che e_1 è sempre un vettore isotropo quindi l'unica segnatura possibile è $(2,2,0)$.

Rimane da studiare la segnatura per $k=0$ e $k=1$. Per questi valori otteniamo le matrici

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha indice $i_0 = 2$. Inoltre se restringiamo il prodotto scalare al piano generato da e_1 ed e_2 vediamo che otteniamo un prodotto scalare non degenere associato ad una matrice di determinante -1 quindi con segnatura $(1,1,0)$ quindi anche sia i_+ che i_- del prodotto scalare b_0 sono non nulli. Quindi la segnatura di b_0 è $(1,1,2)$

Similmente si ragiona per la forma b_1 e si conclude che ha segnatura $(1,1,2)$.

b) Per $k \neq 0,1$ abbiamo che la forma è non degenere e quindi l'ortogonale di $U = Span(e_1, e_2)$ ha dimensione $4 - \dim U = 2$.

Per $k=0$ osserviamo che $b_0|_U$ ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

in particolare osserviamo che abbiamo che $b_0|U$ è non degenere e quindi la dimensione dell'ortogonale è uguale a 2.

Per $k=1$ osserviamo che U è il radicale di b_1 e quindi $U^\perp = \mathbb{R}^4$