Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n. 6 del 2014

Esercizio 1. Si studino i seguenti sistemi lineari S ed S' al variare dei parametri reali k ed h:

$$S : \begin{cases} x - y + z = k \\ x + k\,y - z = 1 \end{cases} \qquad S' : \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}\,h\,z = 0 \\ x + y + \dfrac{1}{2}\,h\,z = 1 + h \\ y + z = h \end{cases}$$

b) Si determinino eventuali valori dei parametri h, k per cui esistono soluzioni comuni ad S ed S'.

Esercizio 2. a) Si determinino le soluzioni dell'equazione

$$\exp(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\,.$$

b) Tra le soluzioni precedenti, che indichiamo con z_k, individuare quelle con argomento compreso tra 0 e π, per cui esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che z_k^r e z_k abbiano argomenti opposti.

Esercizio 3. Nel riferimento $\mathcal{R}(O, x, y, z)$
a) si dimostri che la quadrica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2\,xy + 4\,xz + 4\,yz = 0$$

rappresenta un cono reale di vertice $O = (0, 0, 0)$.
b) Si dimostri che la sezione di $\mathcal{C}$ con il piano $\pi : x - y + z = 0$ è una conica degenere unione delle rette r, s di cui si diano le equazioni.
c) Si determini il luogo dei punti V da cui proiettare r ed s in due rette parallele r' ed s' del piano $\pi' : x + 2\,y - 3\,z = 1$.

Esercizio 4. Si consideri matrice $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ al variare dei paramentri reali a, b

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b+1 \\ a & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

a) Studiare triangolabilità e diagonalizzabilità al variare dei parametri reali a e b.
b) Determinare i valori di a e b per cui A e nilpotente e per essi $(ImA)^{\perp}$ ed il nucleo di A^T.
c) Dimostrare che per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ i suddetti spazi coincidono.

Esercizio 5. a) Scrivere l'equazione del fascio di coniche tangenti in $T = (0, 0)$ alla retta $x = 0$ e passanti per $A = (1, 1)$ e $A' = (h, -1)$ con h parametro reale.
b) Si dimostri che 1 è l'unico valore da assegnare al parametro h affinché nel fascio vi sia una sola parabola γ di cui si chiedono le coordinate omogenee del punto improprio C_∞ .
c) Determinare l'equazione della polare p di $P_\infty = (1, 2, 0)$ e verificare che p contiene i punti medi delle corde i cui estremi sono le intersezioni della parabola γ con le rette contenenti P_∞.