Compito di geometria e algebra lineare del 13 settembre 2021

Istruzioni: Avete 2 ore. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Se il compito è svolto da remoto, quando avete finito fate una foto ai fogli che avete scritto e spediteli sulla piattaforma e-learning. È preferibile svolgere un esercizio in modo completo che dire qualcosa di ogni esercizio. Buon lavoro!

Esercizio 1. Sia $E = M(3, 2, \mathbb{C})$ lo spazio vettoriale complesso formato dalle matrici complesse 3×2. Sia $V \subset E$ il sottospazio formato dalle matrici A tali che $A \cdot (e_1 + e_2) = 0$. Sia $F : V \longrightarrow \mathbb{C}^3$ l'applicazione definita da

$$F(A) = A \cdot e_1.$$

(1) Si calcoli la dimensione di V e se ne determini una base.
(2) Si scriva la matrice associata ad F rispetto a questa base in partenza e alla base canonica in arrivo.

Esercizio 2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la retta ℓ generata dal vettore $(1, 1, 1)$ e il piano π di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Si consideri il cilindro:

$$C = \{v \in \mathbb{R}^3 : dist(v, \ell) = 1, \text{ e } dist(v, \pi) \leqslant 2\}$$

(1) Descrivere una isometria affine f che porta il cilindro in sé e che mandi il punto e_1 nel punto e_2.
(2) Sia P il punto $(2, 1, 0)$. Descrivere una isometria affine g di $\mathbb{R}^3$ tale che $g(P) \in C$.

Esercizio 3. Sia g_S il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$S = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -k & k & 0 \\ 0 & k & -k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

(1) Determinare la segnatura di g_S al variare di k.
(2) Determinare l'ortogonale del sottospazio definito dalle equazioni $x_1 + x_2 = 0$ e $x_3 + x_4 = 0$ rispetto al prodotto scalare g_S nel caso $k = 1$.

Esercizio 1. (1) Una matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

appartiene a V se e solo se $b = -a$, $d = -c$ e $f = -e$. Quindi le tre matrici

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sono una base di V. In particolare V ha dimensione 3.

(2) Abbiamo $[F]^{M_1,M_2,M_3}_{e_1,e_2,e_3} = I$.

Esercizio 2. (1)Osserviamo che l'isometria vettoriale che permuta ciclicamente gli assi, ovvero l'isometria che manda e_1 in e_2, e_2 in e_3 e e_3 in e_1 manda la retta ℓ e il piano π in sé stessi. Quindi manda anche il cilindro C in sé stesso. In coordinate la trasformazione

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(2) Se Q è un punto del cilindro basta considerare la traslazione che manda P in Q. Possiamo scegliere $Q \in \pi$ a distanza 1 dall'origine, poiché π e ℓ sono ortogonali e si intersecano nell'origine, questo punto avrà distanza 1 da ℓ. Per esempio possiamo scegliere $Q = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ e quindi

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \\ x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Calcoliamo i determinanti dei 4 minori principali. Otteniamo i valori

$$k, \qquad -1-k^2, \qquad k, \qquad 2k^2+1.$$

Osserviamo che se $k<0$ i segni di questi minori sono $-,-,-,+$. Quindi il prodotto scalare ha segnatura $(2,2,0)$.

Se $k>0$ i segni di questi minori sono $+,-,+,+$. Quindi il prodotto scalare ha ancora segnatura $(2,2,0)$.

Se $k=0$ il primo minore è zero e quindi non possiamo calcolare la segnatura utilizzando come nei casi precedenti.

In questo caso la matrice S_0 è uguale a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice associata a g_0 è 1, quindi $i_0=0$ e i_- è pari. Infine e_1 è un vettore isotropo quindi il prodotto scalare non può essere né definito positivo né definito negativo. L'unica possibilità che rimane è che la segnatura sia anche in questo caso $(2,2,0)$.

(2) Il sottospazio W ha dimensione 2 ed ha come base e_1-e_2 e e_3-e_4. L'ortogonale a tale sottospazio è quindi l'inseme dei vettori v tali che

$$g_1(v, e_1-e_2)=0 \quad \text{e} \quad g_1(v, e_3-e_4)=0,$$

ovvero dei vettori $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tali che

$$2x_2-x_3=0 \quad \text{e} \quad x_2-2x_3=0.$$

Risolvendo il sistema otteniamo che queste due equazioni sono equivalenti a $x_2=x_3=0$. Quindi l'ortogonale di W è il sottospazio generato da e_1 ed e_4.