Compito di geometria e algebra lineare del 7 giugno 2021

Istruzioni: Avete 2 ore. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Se il compito è svolto da remoto, quando avete finito fate una foto ai fogli che avete scritto e spediteli sulla piattaforma e-learning. Buon lavoro!

Esercizio 1. [12 punti] Considera i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ seguenti:

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\\2\end{pmatrix}\right), \qquad W = \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{array}\right.$$

(1) Determina delle basi per i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$.
(2) Sia $V = U \cap W$. Esiste una funzione lineare $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ non iniettiva tale che $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Im}(f) \oplus V$?

Esercizio 2. [12 punti] Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale formato dai polinomi di grado $\leqslant 2$. Considera su V il prodotto scalare

$$g(p(x), q(x)) = p(0)q(1) + p(1)q(0) + p(-1)q(-1).$$

(1) Determina la segnatura di g.
(2) Esiste un sottospazio vettoriale $W \subset V$ di dimensione 1 tale che $W \subset W^\perp$? Motivare la risposta.

Esercizio 3. [12 punti] Siano r la retta affine passante per i punti $P = (5, 5, -1)$ e $Q = (-7, -7, -1)$ e π il piano affine $\pi = \{y = 1\}$.

(1) Costruisci una isometria affine $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) \subset \pi$. Se puoi, descrivila prima geometricamente a parole e poi calcola A e b.
(2) Descrivi a parole come costruire una isometria che abbia punti fissi e una che non li abbia (non è necessario descrivere esplicitamente A e b).

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Ad esempio

$$\begin{pmatrix}2\\7\\2\\4\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(2) No, perché la sua immagine avrebbe dimensione al massimo 2 e V ha dimensione 1.

Esercizio 2.

(1) Con la base canonica la matrice associata è

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

che con il criterio di Jacobi scopriamo avere segnatura $(2, 1, 0)$.

(2) Notiamo che $g(p(x), p(x)) = 2p(0)p(1) + p(2)^2$. Ne deduciamo che i vettori $x(x-2)$ e $(x-1)(x-2)$ sono esempi di vettori isotropi. La retta V generata da un vettore isotropo soddisfa le ipotesi $W \subset W^\perp$.

Esercizio 3. Tra le tante possibili soluzioni, si può ruotare lungo l'asse z in senso orario di angolo $\pi/4$ e poi traslare di vettore $(0, 1, 0)$. Quindi

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

La risposta non è unica, esistono svariate altre isometrie. L'isometria descritta ha dei punti fissi (si verifica a mano: è una rotazione intorno ad un asse verticale). Per ottenerne una senza punti fissi è sufficiente comporre con una traslazione verticale.