Compito di geometria e algebra lineare del 28 giugno 2021

Istruzioni: Avete 2 ore. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Se il compito è svolto da remoto, quando avete finito fate una foto ai fogli che avete scritto e spediteli sulla piattaforma e-learning. Buon lavoro!

Esercizio 1. [12 punti] Considera l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ data da

$$f(x,y,z) = (x-3y-9z, x+2y+z, y+2z, x+2y+z).$$

(1) Determina delle basi del nucleo e dell'immagine di f.
(2) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ sia l'identità su $\mathbb{R}^3$?

Esercizio 2. [12 punti] Considera la retta r passante per i punti $(-2,-1,3)$ e $(-2,-1,11)$ e la retta s passante per i punti $(0,1,2)$ e $(7,1,2)$.

(1) Determina una isometria affine $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = s$.
(2) Esiste una isometria affine g tale che $g(r) = s$ e $g(s) = r$? Motiva la risposta.

Esercizio 3. [12 punti] Considera la conica dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$ di equazione

$$x^2 + (1-t)y^2 + 2tx + 2(t-1)y + 2 - t = 0.$$

(1) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la conica è una ellisse?
(2) Determina il tipo di conica al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) La matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 2. Le prime due colonne formano una base per l'immagine di f. Il nucleo ha dimensione $3 - 2 = 1$ ed è generato dal vettore

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) No, perché f non è iniettiva e quindi $g \circ f$ non può essere iniettiva.

Esercizio 2.

(1) Basta effettuare una rototraslazione di angolo $\pi/2$ e passo 4 con un asse oppurtuno parallelo all'asse delle y. Ad esempio questa funziona:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ci sono molte altre soluzioni possibili.
(2) Esiste: una antirotazione lungo la retta perpendicolare a r e s di angolo $\pi/2$, con riflessione lungo il piano ortogonale passante per il punto medio fra le due rette (sarebbe il piano coordinato xz).

Esercizio 3. La matrice completa è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1-t & t-1 \\ t & t-1 & 2-t \end{pmatrix}.$$

Con Jacobi troviamo i determinanti $1, 1-t, (1-t)^2(1+t)$. La matrice A è degenere per $t = \pm 1$ e definita per $-1 < t < 1$. Ne deduciamo che la conica è un'ellisse per $t < -1$, un'iperbole per $t > 1$, e l'insieme vuoto per $-1 < t < 1$. Nei casi degeneri troviamo: per $t = 1$ l'equazione si riduce a $x^2 + 2x + 1 = 0$ che è una retta doppia verticale di equazione $x + 1 = 0$; per $t = -1$ si ottiene

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 3 = (x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 0$$

che è un punto di coordinate $(1, 1)$.