Compito di geometria e algebra lineare del 19 luglio 2021

Istruzioni: Avete 2 ore. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Se il compito è svolto da remoto, quando avete finito fate una foto ai fogli che avete scritto e spediteli sulla piattaforma e-learning. Buon lavoro!

Esercizio 1. [12 punti] Indichiamo con $\mathbb{R}_n[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a n, e con $M(n)$ lo spazio delle matrici reali quadrate $n \times n$. Considera l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}_3[x] \to M(2)$ data da

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-2) & p(1) \\ p(-1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

(1) Determina una base per il nucleo e per l'immagine di f.
(2) Sia $W \subset \mathbb{R}_3[x]$ il sottospazio formato da tutti quei polinomi $p(x)$ tali che $p'(0) = 0$. Determina una base di $f(W)$.

Esercizio 2. [12 punti] Siano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un piano vettoriale e $r \subset \pi$ una retta vettoriale. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di angolo θ intorno ad r e sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su π.

(1) Dimostra che 0 è autovalore della composizione $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
(2) Per quali valori di $\theta \in [0, \pi]$ la composizione $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile?

Esercizio 3. [12 punti]
Considera il prodotto scalare g_S su $\mathbb{R}^4$ definito dalla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Qual è la segnatura di g_S?
(2) Considera il sottospazio $W = \{x_1 + x_3 = 0\}$. Determina una base di $W^\perp$.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Un polinomio non nullo di grado $\leqslant 3$ non può annullarsi in 4 valori differenti. Quindi $\ker f = \{0\}$. Dal teorema della dimensione segue che l'immagine di f ha dimensione 4 e quindi f è suriettiva. Qualsiasi base di $M(2)$, ad esempio quella canonica, è una base dell'immagine.
(2) Lo spazio W ha come base $1, x^2, x^3$. Questi vettori vanno nelle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Queste matrici sono indipendenti e quindi sono una base di $f(W)$.

Esercizio 2. Prendiamo una base ortonormale v_1, v_2, v_3 in cui $v_1 \in r$ e $v_1, v_2 \in \pi$. Rispetto a questa base gli endomorfismi f e g sono rappresentati rispettivamente dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la composizione $g \circ f$ è rappresentata dal prodotto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono 1, $|cos\theta$ e 0. Usando il teorema di diagonalizzabilità si verifica che la matrice è diagonalizzabile se $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 3.

(1) Troviamo $\det S = 1$, quindi le uniche segnature possibili sono $(4,0,0)$, $(2,2,0)$, $(0,4,0)$. La restrizione di g a Span (e_1, e_3) è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha $i_+ = 1$ e $i_- = 1$. Quindi l'unica segnatura possibile è $(2,2,0)$.

(2) Il sottospazio W ha base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Imponendo che $(x_1, x_2, x_3, x_4) S v_i = 0$ per ogni $i = 1, 2, 3$ si trova $x_1 = x_3, x_2 = 0, x_4 = 0$. Quindi una base per $W^\perp$ è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$