Compitino di geometria e algebra lineare del 4 giugno 2021

Istruzioni: Avete 2 ore di tempo. Non è sufficiente dare la risposta giusta, dovete fornire delle giiustificazioni. Durante lo svolgimento non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito. Alla fine fate una foto ai fogli che avete scritto e spediteli sulla piattaforma e-learning. Buon lavoro!

Esercizio 1. [12 punti] Determina al variare di $t \in \mathbb{R}$ la segnatura della matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. [12 punti] Considera la retta vettoriale in $\mathbb{R}^3$

$$r = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sia $U = r^\perp$ il piano vettoriale ortogonale a r. Siano f una rotazione di angolo θ intorno a r e g la proiezione ortogonale su U. Per quali $\theta \in [0, 2\pi)$ la composizione $g \circ f$ è diagonalizzabile?

Esercizio 3. [12 punti] Considera le rette affini

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ t+2 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} -1+u \\ -2-u \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(1) Costruisci una isometria affine $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = s$ e $f(s) = r$.
(2) Esiste una isometria affine f senza punti fissi tale che $f(r) = s$ e $f(s) = r$?

Soluzioni

Esercizio 1. La restrizione al piano generato da e_1 e e_2 ha matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

Poiché il determinante è negativo, qui otteniamo $i_- = i_+ = 1$. Le segnature possibili per S sono quindi

$$(2,1,0), \qquad (1,2,0), \qquad (1,1,1).$$

Il determinante della matrice S è $2-t$. Quindi otteniamo $(2,1,0)$ per $t > 2$, $(1,1,1)$ per $t = 2$ e $(1,2,0)$ per $t < 2$.

Esercizio 2. Scegliendo una base ortonormale v_1, v_2, v_3 in cui $v_1 \in r$ e $v_2, v_3 \in U$, le matrici associate a f e g sono

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La composizione ha matrice associata il loro prodotto, che è

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è diagonalizzabile solo per $\theta = 0, \pi$.

Esercizio 3. Le due rette sono ortogonali e si intersecano in $P = (-2, -1, 2)$. Quindi una rotazione di $\pi/2$ intorno alla retta r perpendicolare alle due rette e passante per P funziona. La retta r è parallela all'asse z e quindi i conti sono semplici. Ad esempio questa funziona:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono molte altre possibili soluzioni. Una isometria affine che scambia le due rette deve per forza fissare il punto P, quindi deve avere un punto fisso.