

# SISTEMI LINEARI

In queste note faremo alcune osservazioni sui sistemi lineari

## COSA È UN SISTEMA LINEARE

Iniziamo con un esempio di un sistema lineare di due equazioni nelle variabili  $x_1, x_2$ :

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

Più in generale un sistema di  $m$  equazioni nelle  $n$  variabili  $x_1, \dots, x_n$  è un sistema della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove  $a_{ij}$  e  $b_i$  sono dei numeri fissati.

Possiamo riscrivere le equazioni che definiscono un sistema lineare usando il linguaggio delle matrici o quello delle applicazioni lineari.

Per esempio nel caso del primo sistema possiamo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Allora il sistema si può riscrivere in forma apparentemente più compatta come

$$A \cdot x = b$$

o equivalentemente

$$L_A(x) = b$$

Le stesse cose possiamo farle nel caso del secondo sistema ponendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matrice  $m \times n$ ,  $A$  si chiama le matrice associate al sistema e la matrice  $m \times (n+1)$

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

si chiama le matrice completa associate al sistema

Nello studio dei sistemi lineari ci proponiamo i seguenti obiettivi:

- chiedere cosa vuol dire risolvere un sistema
- capire quando un sistema ha soluzioni e dire quante sono le soluzioni
- dare un metodo per risolvere un sistema

## COSA VUOL DIRE RISOLVERE UN SISTEMA

Se ho un sistema di  $m$  equazioni in  $n$  incognite

$$A x = b$$

risolverlo vuol dire calcolare tutte le  $x \in K^n$  che verificano l'equazione.

Iniziamo con un esempio nel quale la soluzione è unica.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

posso ricavare  $x_1$  dalla seconda equazione

e sostituendo ricavo

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 \\ 6 - x_2 = 1 \end{cases}$$

ricavo quindi

$$\begin{cases} x_2 = 5 \\ x_1 = -8 \end{cases}$$

Quindi il sistema ha un'unica soluzione  $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

La stessa situazione si verifica tutte le volte che la matrice

$A$  è invertibile. Infatti se  $A$  è invertibile da  $Ax = b$

possiamo ricavare  $x = A^{-1}b$ .

In alcuni casi però il sistema non ha un'unica soluzione ma

ne ha infinite. In questi casi non possiamo elencare tutte

le soluzioni, però possiamo descriverle in modo trasparente. Iniziamo

con un esempio. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Se ricavo  $x_1$  dalla seconda equazione e sostituisco ottengo

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 - x_4 \\ -x_2 - 5x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

se ricavo  $x_2$  dalla 2<sup>a</sup> equazione e sostituisco nella 1<sup>a</sup>

$$\textcircled{*} \begin{cases} x_2 = -5x_3 - x_4 - 1 \\ x_1 = 7x_3 + x_4 + 2 \end{cases}$$

Scritto in questo modo le soluzioni sono libere:  $x_3, x_4$  le possiamo far variare liberamente e  $x_1, x_2$  le

calcoliamo mediante le formule  $(*)$ . Per esempio

per  $x_3 = 0$   $x_4 = 0$  otteniamo che  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  è una soluzione

per  $x_3 = 2$   $x_4 = 1$  otteniamo  $\begin{pmatrix} 17 \\ -12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  è una soluzione e così via

L'insieme di tutte le soluzioni è perciò

$$\left\{ \begin{pmatrix} 7x_3 + x_4 + 2 \\ -5x_3 - x_4 - 1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in K \right\}$$

Una volta che abbiamo risolto il sistema originale nella forma

$$(**) \begin{cases} x_2 = -5x_3 - x_4 - 1 \\ x_1 = 7x_3 + x_4 + 2 \end{cases}$$

chiamiamo  $x_3, x_4$  variabili libere e  $x_1, x_2$  variabili dipendenti.

Possiamo riscrivere  $(**)$  anche in questa forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In generale se abbiamo un sistema  $Ax = b$  vogliamo raggiungere un obiettivo simile: stabilire se ha soluzioni e se ha soluzioni individuare delle variabili libere,  $x_{j_1}, \dots, x_{j_h}$ , e delle variabili dipendenti,  $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$  nelle quali il sistema si riscrive nella forma

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_l} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_h} \end{pmatrix} + d$$

dove  $C$  è una matrice  $l \times h$  e  $d \in K^l$ .



Se il sistema è della forma

$$A \cdot x = 0$$

il sistema si dice omogeneo e le soluzioni sono il nucleo di  $L_A$ . Invece il sistema si dice

non omogeneo se è della forma  $Ax = b$  con  $b \neq 0$ .

e in tal caso l'equazione omogenea associata è  $A \cdot x = 0$

### PROPOSIZIONE

Si consideri il sistema

$$A \cdot x = b$$

con  $A$  matrice  $m \times n$ ,  $b \in K^m$  e  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  l'incognita.

1) Il sistema ha soluzione se e solo se  $b \in \text{Im } L_A$

2) Se  $v$  è una soluzione del sistema allora le altre soluzioni del sistema si ottengono sommando a  $v$  un elemento del nucleo di  $L_A$ .

$$\{x \in K^n : A \cdot x = b\} = v + N(L_A)$$

dim

$$1) \quad \text{Im } L_A = \{L_A(v) : v \in K^n\} = \{A \cdot v : v \in K^n\}$$

quindi  $b = A \cdot v$  per qualche  $v$  se e solo se  $b \in \text{Im } L_A$

2) Se  $A \cdot v = b$  allora il sistema

$$A \cdot x = b$$

si può risolvere come

$$A \cdot x = A \cdot v$$

ovvero

$$A \cdot (x - v) = 0$$

quindi:  $A \cdot x = 0$  se e solo se  $x - v \in N(L_A)$

ovvero  $x = v + N(L_A)$

#

### SISTEMI OMOGENEI E BASE DEL NUCLEO

Soffermiamoci ora sul caso dei sistemi omogenei.

$$A \cdot x = 0$$

Per rendere la discussione più concreta supponiamo che il sistema sia in 5 variabili. Supponiamo di poterlo risolvere e che  $x_2, x_4, x_5$  siano le variabili libere e  $x_1, x_3$  siano le dipendenti. Abbiamo

quindi:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + d$$

con  $C$   $2 \times 3$  e  $d \in K^3$ . Inoltre poiché  $x=0$  è una soluzione

del sistema deve essere  $d=0$ . Quindi abbiamo

$$x \in N(L_A) \Leftrightarrow A \cdot x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Una volta scritto in questa forma è molto facile scrivere una base del nucleo di  $L_A$  nel seguente modo:

- poniamo  $x_2 = 1$   $x_4 = 0$   $x_5 = 0$  otteniamo  $x_1 = c_{11}$   $x_3 = c_{21}$

ovvero

$$v_1 = e_2 + c_{11} e_1 + c_{21} e_3 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ 1 \\ c_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N(L_A)$$

- similmente poniamo  $x_2 = 0$   $x_4 = 1$   $x_5 = 0$  e otteniamo  $x_1 = c_{12}$   $x_3 = c_{22}$

e  $v_2 = e_4 + c_{12} e_1 + c_{22} e_3 \in N(L_A)$

- infine poniamo  $x_2 = 0$   $x_4 = 0$   $x_5 = 0$  e otteniamo

$$v_3 = e_5 + c_{13} e_1 + c_{23} e_3$$

$v_1, v_2, v_3$  sono una base di  $N(L_A)$ . Infatti se

$v \in N(L_A)$ , mostriamo che lo possiamo scrivere in modo unico

come combinazione lineare:  $v = a v_1 + b v_2 + c v_3$ .

Se  $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_5 e_5$  e  $v \in N(L_A)$  abbiamo

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}$$

Osserviamo inoltre che  $a v_1 + b v_2 + c v_3 = x e_1 + a e_2 + y e_3 + b e_4 + c e_5$

con  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

quindi  $v = a v_1 + b v_2 + c v_3$  e solo se  $a = \alpha_2$   $b = \alpha_4$   $c = \alpha_5$ .

Lo stesso metodo funziona per ogni sistema per il quale siano state individuate delle variabili libere. In particolare abbiamo

la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE Sia  $A$   $m \times n$  e supponiamo di aver risolto il sistema  $Ax = 0$  individuando  $h$  variabili dipendenti e  $k$  variabili libere. Allora  $N(L_A)$  ha una base fatta di  $k$  vettori.

## SISTEMI A SCALINI

Una matrice si dice a scalini se ad ogni riga il primo elemento diverso da zero è sempre più a destra. Per esempio la matrice A è a scalini mentre B e C non lo sono:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{2} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ho cerchiato le entrate che rendono le matrici non a scalini. Nella matrice A invece ho riquadrato le prime entrate diverse da zero di ogni riga. Queste entrate si chiamano i PIVOT della matrice.

Quando una matrice è a scalini è facile dire se il sistema  $Ax = b$  ha soluzione e dire quali saranno le variabili libere e le variabili dipendenti. Facciamo il caso della matrice A scritta sopra e di un vettore  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{pmatrix}$  generico.

Otteniamo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_2} + 2x_3 + 3x_4 + 3x_6 = b_1 \\ \boxed{x_4} + 5x_5 = b_2 \\ \boxed{x_5} = b_3 \\ 0 = b_4 \end{array} \right.$$

dove ho riquadrato le entrate con cui PIVOT.

Vediamo subito che per avere soluzione deve essere  $b_4 = 0$ . Viceversa se  $b_4 = 0$ , possiamo ricavare

$x_5$  dalla terza equazione e sostituirlo nelle precedenti, ricavare  $x_4$  dalla seconda e sostituirlo nelle precedenti e ricavare  $x_2$  dalla prima equazione.

Nel caso specifico otteniamo

$$\begin{cases} x_2 &= -2x_3 - 3x_6 + b_1 - 3b_2 + 15b_3 \\ x_4 &= b_2 - 5b_3 \\ x_5 &= b_3 \end{cases}$$

ovvio

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 - 3b_2 + 15b_3 \\ b_2 - 5b_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Questo metodo nel caso di un sistema a coefficienti funzionali sempre. Per riassumere queste operazioni introduciamo una definizione.

DEFINIZIONE Se  $A$  è una matrice a coefficienti il rango di  $A$  è il numero delle righe diverse da zero equivalentemente il numero di PIVOT.

PROPOSIZIONE Se  $A$  è una matrice a coefficienti  $m \times n$  di rango  $R$  allora

1) Se  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  il sistema  $Ax = b$

ha soluzione se e solo se  $b_{R+1} = \dots = b_m = 0$

2) Se il sistema ha soluzione possiamo individuare le variabili dipendenti come

le variabili corrispondenti ai PIVOT  
e le variabili libere come le rimanenti.

## RI DUZIONE A SCALINI

Illustreremo un metodo per trasformare un sistema qualsiasi in un sistema a scalini. Questo metodo è efficiente quando si devono risolvere sistemi con tante equazioni e tante incognite, inoltre per noi avrà qualche importanza teorica.

Se abbiamo un sistema  $Ax = b$  ovvero

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

possiamo considerare le seguenti trasformazioni che non cambiano le soluzioni del sistema

$R_{ij}$  : possiamo scambiare la riga  $i$  con la riga  $j$

$R_i(\lambda)$  : possiamo moltiplicare la riga  $i$ -esima per un numero  $\lambda \neq 0$

$R_{ij}(\alpha)$  : possiamo sommare alle righe  $i$ -esima,  $\alpha$  volte la riga  $j$ -esima.

Illustriamo ora come possiamo utilizzare queste trasformazioni per risolvere un sistema con un esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ \quad \quad \quad x_3 + \quad \quad \quad + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

È conveniente invece di risolvere tutta la volta l'intero sistema scrivere solo la matrice completa e operare sulle righe di questa matrice

$$\begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\
 2 & 3 & 4 & 4 & 1 & 4
 \end{array}$$

Parto dalla prima colonna. Se fosse fatta tutta di zero passerei alla seconda colonna. Nel nostro caso non è zero e faccio in modo che l'entrata più in alto sia diversa da zero. Nel nostro caso è 1, quello che ho cerchiato. Questo sarà il primo pivot.

La prima colonna però non può essere la colonna di una matrice e scalini per la presenza delle due entrate diverse da zero evidenziate. Allora sommo alla terza e alla quarta riga un opportuno multiplo della prima riga per "cancellare" queste entrate.

$$\begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\
 2 & 3 & 4 & 4 & 1 & 4
 \end{array}
 \xrightarrow{R_3(-1)}
 \begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
 2 & 3 & 4 & 4 & 1 & 4
 \end{array}
 \xrightarrow{R_4(-2)}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2
 \end{array}
 \xrightarrow{R_{23}}$$

A questo punto la prima riga e la prima colonna sono sistemate.

Ora però ed operare sulla seconda colonna.

Nel nostro caso le entrate evidenziate rendono la matrice non a scalini, perché se c'è una entrata diversa da zero deve stare nella seconda riga. Allora le scambio.

Continuo così: ad ogni passaggio lo evidenzio l'entrata

de collegare e lo cerchiamo i PIVOT che via via si sono formati.

$$\begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\
 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2
 \end{array}
 \xrightarrow{R_{42}(-1)}
 \begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0
 \end{array}
 \xrightarrow{R_{43}(-1)}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & \textcircled{-1} & -4 & -2
 \end{array}$$

Ho così trasformato un sistema in uno scalare. Nel nostro caso posso dire che il sistema ha soluzione e ha  $n_5$  come unica variabile libera. Lo stesso metodo funziona in generale e per fare questo è chiaro basterebbe trasformare  $R_{ij}$  e  $R_{ij}(a)$ .

Se vogliamo trovare le soluzioni del sistema invece di cercare le variabili e sostituire possiamo continuare e ridurre la matrice in modo che

- tutti i pivot siano uguali a 1
- Le entità sopra i pivot siano zero

$$\begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & \textcircled{-1} & -4 & -2
 \end{array}
 \xrightarrow{R_4(-1)}
 \begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 2
 \end{array}
 \xrightarrow{R_{24}(-1)}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & -3 & 0 \\
 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 2
 \end{array}
 \xrightarrow{R_{14}(-2)}
 \begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 & -7 & -3 \\
 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & -3 & 0 \\
 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 2
 \end{array}
 \xrightarrow{R_{23}(-1)}$$



$$\begin{array}{cccccc|cccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 & -7 & -3 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & -7 & -5 \\
 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & -5 & -2 \\
 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 2
 \end{array}
 \xrightarrow{R_{13}(-1)}
 \begin{array}{cccccc|cccc}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 & -7 & -3 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & -7 & -5 \\
 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & -5 & -2 \\
 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 2
 \end{array}
 \xrightarrow{R_{12}(-1)}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & -4 & -3 \\
 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & -5 & -2 \\
 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 2
 \end{array}$$

A questo punto il sistema è

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 4x_5 = -3 \\ x_2 - 5x_5 = -2 \\ x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_4 + 4x_5 = 2 \end{array} \right. \quad \text{ovvero} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 4x_5 - 3 \\ x_2 = 5x_5 - 2 \\ x_3 = -2x_5 + 2 \\ x_4 = -4x_5 + 2 \end{array} \right.$$

## MATRICI DI RANGO MASSIMO

Sia  $B$  una matrice e scegli  $m \times n$ .

Da quanto osservato in precedenza otteniamo

- 1)  $\text{rang} B = m$  se e solo se  $\forall b \in K^m$  il sistema  $Bx = b$  ha soluzione
- 2)  $\text{rang} B = n$  se e solo se non ci sono variabili libere ovvero il sistema  $Bx = 0$  ha come unica soluzione  $x = 0$ .

Ora estendiamo questa osservazione al caso di matrici qualsiasi

Sia  $A$  una matrice  $m \times n$  e  $\hat{A}$  una sua riduzione a scalini

1)  $A = 0$  se e solo se  $\hat{A} = 0$

2) Sono equivalenti:

a)  $Ax = 0$  ha l'unica soluzione  $x = 0$

b)  $\hat{A}$  ha rango  $n$

3) Sono equivalenti:

a) Il sistema  $Ax = b$  ha soluzione  $\forall b \in K^m$

b)  $\hat{A}$  ha rango  $m$

dim

1) è ovvio

2) Osserviamo che  $Ax = 0$  e  $\hat{A}x = 0$  hanno le stesse soluzioni giacché la condizione a) è equivalente alla condizione

$\hat{A}x = 0$  ha l'unica soluzione  $x = 0$ . Come osservato

questo vuol dire rango  $\hat{A} = n$

3) Osserviamo che ogni sistema  $Ax = b$ , mediante il processo

di riduzione a scalini si trasforma in un sistema  $\hat{A}x = c$

Vic versa percorrendo all'indietro i passaggi della riduzione

a scalini ogni sistema  $\hat{A}x = c$  si trasforma in un

sistema  $Ax = b$ . Quindi la condizione a) è equivalente alla

condizione  $\hat{A}x = c$  ha soluzione  $\forall c \in K^m$ . Come

osservato in precedenza questo è equivalente alla

condizione rango  $\hat{A} = m$

#

Osserviamo che le condizioni nei punti 2) e 3) sono indipendenti da come abbiamo ridotto  $A$  a scalini

questo vuol dire che se  $\hat{A}$  e  $\tilde{A}$  sono due diverse riduzioni della matrice  $A$  a scalinì allora  
 $\text{rango}(\hat{A}) = m$  se e solo se  $\text{rango}(\tilde{A}) = n$  e  
 $\text{rango}(\hat{A}) = n$  se e solo se  $\text{rango}(\tilde{A}) = m$ .

### DEFINIZIONE

Sia  $A$  una matrice  $m \times n$  e sia  $\hat{A}$  una sua riduzione di  $A$  a scalinì. Poniamo  $\text{rango } A = m$   
 se  $\text{rango } \hat{A} = m$  e  $\text{rango } A = n$  se  $\text{rango } \hat{A} = n$ .

OSS. Tra poco daremo questa definizione più in generale nel caso di un rango qualsiasi, prima però diamo un'applicazione della proposizione precedente allo studio delle matrici invertibili.

### M A T R I C I I N V E R T I B I L I

La proposizione appena dimostrata ci permette di capire meglio quali siano le matrici invertibili.

### P R O P O S I Z I O N E

- 1) Sia  $A$  una matrice  $m \times n$ . Se  $A$  è invertibile allora  $m = n$  e  $\text{rango}(A) = n$
- 2) Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  di rango  $n$  allora  $A$  è invertibile

dim

- 1) Se  $A$  è invertibile allora  $\forall b$  il sistema  $Ax = b$  ha un'unica soluzione, quindi  
 $\text{rango}(A) = n$  (perché  $Ax = 0$  ha un'unica sol.)  
 $\text{rango}(A) = m$  (perché  $Ax = b$  ha sempre soluzione)

quindi  $n = m = \text{rang}(A)$

2) Sia  $A$   $n \times n$  e sia  $\text{rang}(A) = n$ .

Allora  $Ax = b$  ha sempre soluzione.

Sia  $v_i$  tale che

$$A v_i = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Poniamo allora  $B = (v_1 \dots v_n)$  la matrice le cui colonne sono  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .  
Allora  $A \cdot B$  ha colonne  $(A v_1, \dots, A v_n)$

quindi

$$A \cdot B = (A v_1, \dots, A v_n) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Ho trovato una matrice  $B$  tale che  $A \cdot B = I_n$ ,  
ora verifico  $C = B \cdot A = I$ .

Siano  $c_1, \dots, c_n$  le colonne di  $B \cdot A$ .

Voglio dimostrare  $c_i = e_i$ .

Osservo che  $A \cdot C = (A B) \cdot A = I \cdot A = A$

Quindi

$A c_i = a_i$  l' $i$ -esima colonna di  $A$

ma anche

$$A e_i = a_i$$

e sappiamo che la soluzione del sistema  $Ax = b$   
è unica quindi deve essere  $c_i = e_i$  #

Quindi le matrici invertibili sono le matrici quadrate di rango massimo.

### Esercizio

Dare se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Soluzione: Calcoliamo il rango riducendo a scalari:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi il rango è 3 e la matrice è invertibile.

Possiamo utilizzare il metodo di riduzione a scalari non solo per stabilire se una matrice è invertibile ma anche per calcolare l'inversa.

Facciamo l'esempio della matrice di prima

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

noi vogliamo calcolare  $B$  con colonne  $v_1, v_2, v_3$  tale che  $AB = I$ ,  
ovvero

$$Av_1 = e_1 \quad Av_2 = e_2 \quad Av_3 = e_3$$

Invece di studiare un sistema alla volta  
li studiamo tutti insieme

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3$

Riduciamo e scalari  $\downarrow R_{21}(-2) \text{ e } R_{31}(-3)$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\downarrow R_{32}(-1)$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Oramai abbiamo ridotto e scalari ma per  
calcolare le soluzioni non vogliamo  
solo ridurre  $A$  e scalari ma anche

for diventare i pivot uguali a 1 e  
annullare le entrate sopra i pivot

Applico quindi  $R_3(-1)$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

↓  $R_{23}(4)$  e  $R_{13}(-3)$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Opinioni i sistemi iniziali:

$$A v_1 = e_1$$

$$A v_2 = e_2$$

$$A v_3 = e_3$$

sono equivalenti e

$$I \cdot v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

quindi  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

In altre parole si parte dalle iniziali

$$(A \mid I)$$

e riducendo e scalini trovo

$$(I \mid B)$$

Allora  $AB = I$  ovvero  $B = A^{-1}$

#

## RANGO DI UNA MATRICE E ROUCHÉ - CAPELLI

DEFINIZIONE Sia  $A$  una matrice  $m \times n$  e sia  $\hat{A}$  una riduzione a scalini di  $A$ . Definisco il rango di  $A$  come il numero di righe diverse da zero di  $\hat{A}$  o equivalentemente il numero di PIVOT di  $\hat{A}$ .

Al momento questa definizione non è ben data. Infatti il processo di riduzione a scalini si può effettuare in modi diversi. Potrebbe quindi essere che una persona riduce  $A$  a scalini trovando una matrice con 5 righe diverse da zero e un'altra se trove una con 6 righe diverse da zero. Questo già se proviamo non succedere per matrici di rango  $m$  o  $n$  e in realtà come vedremo nella prossima nota non succede mai.

Supponendo che sia ben data vediamo che questo concetto permette di riformulare la proposizione enunciata nelle sezioni sui sistemi a scalini nel modo seguente



PROPOSIZIONE (Teorema di Rouché - Capelli)

Sia  $A$  una matrice  $m \times n$  e sia  $b \in K^m$

1) Il sistema ha soluzione se e solo se  
 $\text{rang}(A) = \text{rang}(A b)$

2) Se il sistema ha soluzione allora ci sono  
 $n - \text{rang}(A)$  variabili libere

dim Sia  $R = \text{rang}(A)$ . Se riduciamo il  
sistema a scalari, l'equazione si trasforma  
nel sistema  $\hat{A} x = c$  dove

$\text{rang} A = \text{rang} \hat{A} = n^{\circ}$  di righe diverse da zero di  $\hat{A}$

e  $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$  e  $\text{rang}(A b) = \text{rang}(A)$  se

e solo se  $c_{R+1} = \dots = c_m = 0$ . Quindi i due enunciati  
sono una riformulazione delle proposizioni enunciate  
per i sistemi a scalari. #