APPLICAZIONI LINEARI II PARTE

COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI

Se $F: U \longrightarrow V$ e $G: V \longrightarrow W$ sono applicazioni lineari allora anche la composizione

$$G \circ F : U \longrightarrow W$$

è lineare. Infatti:

1) $(G \circ F)(u_1 + u_2) = G(F(u_1 + u_2))$
$= G(F(u_1) + F(u_2)) =$
$= G(F(u_1)) + G(F(u_2))$
$= (G \circ F)(u_1) + (G \circ F)(u_2)$

2) $G \circ F(\lambda u) = G(F(\lambda u))$
$= G(\lambda F(u)) = \lambda G(F(u))$
$= \lambda (G \circ F)(u)$

Per quanto riguarda la matrice associata vale la seguente generalizzazione della formula $L_B \circ L_A = L_{B \cdot A}$.

PROPOSIZIONE

Sia $u_1, \dots u_p$ una base di U che indichiamo con $\underline{u}$
Sia $v_1, \dots v_m$ una base di V che indichiamo con $\underline{v}$
Sia $w_1, \dots w_\ell$ una base di W che indichiamo con $\underline{w}$
Siano $F: U \longrightarrow V$ e $G: V \longrightarrow W$ app lineari

Allora

$$[G \circ F]^{\underline{u}}_{\underline{w}} = [G]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot [F]^{\underline{u}}_{\underline{v}}$$

<u>dim</u> Sia $H = G \circ F$. La matrice $[H]^{\underline{u}}_{\underline{w}}$ associata ad H è la matrice caratterizzata da

$$[H]^{\underline{u}}_{\underline{w}} \, [u]_{\underline{u}} = [H(u)]_{\underline{w}}$$

per ogni $u \in U$. Vediamo se anche la matrice $[G]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot [F]^{\underline{u}}_{\underline{v}}$ ha la stessa proprietà. Infatti

$$[G]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot [F]^{\underline{u}}_{\underline{v}} \cdot [u]_{\underline{u}} =$$

$$\overset{(*)}{=} [G]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \, [F(u)]_{\underline{w}}$$

$$\overset{(*)}{=} [G(F(u))]_{\underline{w}} = [H(u)]_{\underline{w}}$$

dove in (*) abbiamo usato le caratt. delle matrici associate a F e G.

#

INVERSA DI UNA APPLICAZIONE LINEARE

Se $F : V \longrightarrow W$ è una applicazione lineare bigettiva, possiamo considerare l'inversa
$F^{-1} : W \longrightarrow V$.

Ricordo che $F^{-1}(w) = v$ se e solo se $F(v) = w$.
in particolare $F^{-1} \circ F = Id_V$ e $F \circ F^{-1} = Id_W$. e che queste due proprietà caratterizzano F^{-1}.

Vogliamo dimostrare che F^{-1} è lineare.

1) Se $w_1, w_2 \in W$ e $w_1 = F(v_1)$, $w_2 = F(v_2)$
ricaviamo che $F(v_1 + v_2) = w_1 + w_2$ per linearità di F.
Quindi $F^{-1}(w_1) = v_1$ $F^{-1}(w_2) = v_2$
e $F^{-1}(w_1 + w_2) = v_1 + v_2$

2) Se $w \in W$, e $\lambda \in K$ e $w = F(v)$
ricaviamo che $F(\lambda v) = \lambda w$ per linearità di F
Quindi $F^{-1}(w) = v$ e $F^{-1}(\lambda w) = \lambda v$

PROPOSIZIONE

Se $v_1 \dots v_m$ è una base di V

$w_1 \dots w_e$ è una base di W

e $F : V \longrightarrow W$ è lineare

Allora

F è bigettiva se e solo se $[F]^{\underline{w}}_{\underline{v}}$ è invertibile e

$$[F^{-1}]^{\underline{v}}_{\underline{w}} = \left([F]^{\underline{w}}_{\underline{v}}\right)^{-1}$$

dim

Supponiamo prima che F sia bigettiva e sia $G = F^{-1}$ la sua inversa. Sia $A = [F]^{\underline{w}}_{\underline{v}}$ e $B = [G]^{\underline{v}}_{\underline{w}}$

Per quanto dimostrato sulla matrice associata alla funzione composta abbiamo

$$B \cdot A = [G \circ F]^{\underline{v}}_{\underline{v}} = [Id_V]^{\underline{v}}_{\underline{v}} = I$$

$$A \cdot B = [F \circ G]^{\underline{w}}_{\underline{w}} = [Id_W]^{\underline{w}}_{\underline{w}} = I$$

quindi A è invertibile e $B = A^{-1}$

Viceversa supponiamo A sia invertibile e sia $B = A^{-1}$.
Per la corrispondenza tra app. lineari e matrici esiste $G : W \rightarrow V$ tale che $[G]^{\underline{v}}_{\underline{w}} = B$.

Quindi

$$[G \circ F]_{\underline{v}}^{\underline{v}} = B \cdot A = I = [Id_V]_{\underline{v}}^{\underline{v}}$$

e

$$[F \circ G]_{\underline{w}}^{\underline{w}} = A \cdot B = I = [Id_W]_{\underline{w}}^{\underline{w}}$$

ma allora $G \circ F = Id_V$ e $F \circ G = Id_W$

ovvero F è bigettiva e $G = F^{-1}$ #

CAMBIAMENTI DI BASE PER APPLICAZIONI LINEARI

Come abbiamo visto già in alcuni esempi, e come vedremo molto nelle prossime lezioni, ci sono basi nelle quali la matrice associata ad una applicazione lineare è più semplice. Spieghiamo ora come cambia la matrice quando cambiamo base:

Sia $F : V \longrightarrow W$ lineare

Siano $\underline{v}$ e $\underline{v}'$ due basi di V

Siano $\underline{w}$ e $\underline{w}'$ due basi di W.

Vogliamo come determinare $[F]_{\underline{w}'}^{\underline{v}'}$, una volta nota la matrice $[F]_{\underline{w}}^{\underline{v}}$.

La cosa è piuttosto intuitiva: la matrice $[F]^{\underline{v}'}_{\underline{w}'}$ sarà il prodotto di tre matrici:

- la prima (leggendo da destra) sarà il cambiamento di coordinate dalla base $\underline{v}'$ alla base $\underline{v}$
- la seconda sarà $[F]^{\underline{v}}_{\underline{w}}$
- la terza sarà il cambiamento di coordinate dalla base $\underline{w}$ e $\underline{w}'$.

Questo è ben spiegato dalla formula sulla composizione

$$[Id_W]^{\underline{w}}_{\underline{w}'} \cdot [F]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot [Id_V]^{\underline{v}'}_{\underline{v}} = [Id_W \circ F \circ Id_V]^{\underline{v}'}_{\underline{w}'}$$

$$= [F]^{\underline{v}'}_{\underline{w}'}$$