APPLICAZIONI LINEARI

DEFINIZIONE

Siano V e W due K-spazi vettoriali. Una funzione $F: V \longrightarrow W$ si dice lineare o K-lineare se

1) $F(u+v) = F(u) + F(v) \quad \forall\, u, v \in V$

2) $F(\lambda u) = \lambda F(u) \quad \forall\, u \in V \ \forall\, \lambda \in K$

Facciamo due osservazioni che useremo spesso

OSS. 1 $\quad F(0_V) = 0_W$.

Infatti $\quad F(0_V) = F(0 \; 0_V) = 0 F(0_V) = 0_W$

OSS. 2 $\quad$ Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ e se $v_1, \ldots, v_m \in V$

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_m F(v_m)$$

infatti

$$F(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m) = F(\lambda_1 v_1) + \cdots + F(\lambda_m v_m) \quad \text{per la proprietà 1}$$

$$= \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_m F(v_m) \quad \text{per la proprietà 2}$$

Esempi

- $F: K^2 \longrightarrow K$ definita da $F(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$

  F è lineare. Verifico le proprietà 1) e 2)

  1) $F((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = F((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) =$

  $= 3(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) = 3x_1 + 5x_2 + 3y_1 + 5y_2 =$

$= F((x_1, y_1)) + F((x_2, y_2))$

2) $F(\lambda(x_1, y_1)) = F((\lambda x_1, \lambda y_2)) =$

$= 3\lambda x_1 + 5\lambda x_2 = \lambda(3x_1 + 5x_2)$

$= \lambda F((x_1, y_1))$

- L'esempio precedente si generalizza nel seguente modo:

  Siano $a_1, \dots, a_m \in K$ fissati e definisco

  $F : K^m \longrightarrow K$ mediante

  $$F((x_1 \dots x_m)) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m$$

  F è lineare. La verifica è lasciata per esercizio

- Sia $V = \mathbb{K}[t]$ e sia $D : V \longrightarrow V$, $D(f) = f'$

  l'applicazione che associa ad un polinomio la sua derivata

  D è lineare

  1) $D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$

  2) $D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda D(f)$

- Sia $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita

  da $F(f) = f(2)$.

  F è lineare

  1) $F(f+g) = (f+g)(2) = f(2) + g(2) = F(f) + F(g)$

  2) $F(\lambda f) = (\lambda f)(2) = \lambda f(2) = \lambda F(f)$

Alcuni "non esempi"

- $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad F(x,y) = x^2 + y^2$

non è lineare. Infatti

$$F(2(1,1)) = F((2,2)) = 8$$
$$2F(1,1) = 2 \cdot 2 = 4$$

quindi la proprietà 2) non vale. (seppure la 1) vale)

- Se $V = \mathbb{R}[t]$ e $F: V \to \mathbb{R}$ definita da

$F(f) = f(0) \cdot f(1)$ non è lineare

Mostriamo che fallisce, per esempio, la proprietà 2.
Prendiamo f il polinomio costante 1.

$$F(2f) = 2 \cdot 2 = 4$$
$$2F(f) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

Alcuni esempi particolarmente importanti

- Sia A una matrice $l \times m$ e sia $L_A : K^l \to K^m$ l'applicazione associata.
Abbiamo già mostrato che queste applicazioni verificano le proprietà 1) e 2) pertanto sono lineari

- Sia $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una isometria tale che $F(0) = 0$. Allora F è lineare.

1) Siano $P, Q \in \mathbb{R}^3$ e sia $R = P + Q$.
Allora O, P, R, Q è un parallelogramma.

Una isometria porta parallelogrammi in parallelogrammi, pertanto $F(0)=0$ $F(P)$ $F(R)$ $F(Q)$ è un parallelogramma ovvero

$$F(R) = F(P) + F(Q)$$

2) Sia $P \in \mathbb{R}^3$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sia $Q = \lambda P$. Se $P=0$ è chiaro che

$F(Q) = \lambda F(P) = 0$.

Se $P \neq 0$ e $\lambda > 0$, Q è l'unico punto della semiretta OP a distanza $\lambda \|P\|$ dall'origine

Pertanto $F(Q)$ è l'unico punto della semiretta $O=F(0)$ $F(P)$ a distanza $\lambda \|P\| = \lambda \|F(P)\|$ dall'origine.

quindi $F(Q) = \lambda F(P)$

Se $\lambda < 0$ e $P \neq 0$ si ragiona in modo simile con la semiretta opposta

- Sia V uno spazio vettoriale di base $v_1, \dots v_m$ e si consideri l'applicazione $F: V \longrightarrow K^m$ data da

$$F(v) = [v]_{v_1, \dots v_m}$$

F è lineare.

1) Siano $u, v \in V$. Sia $u = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ e sia $v = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$. Quindi

$$u+v = (a_1+b_1) v_1 + \dots + (a_m+b_m) v_m$$

questo vuol dire che

$$[u]_{v_1 \dots v_m} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad [v]_{v_1 \dots v_m} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad [u+v]_{v_1 \dots v_m} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{pmatrix}$$

quindi

$$[u+v]_{v_1 \dots v_m} = [u]_{v_1 \dots v_m} + [v]_{v_1 \dots v_m}$$

2) Sia $u \in V$ e $\lambda \in K$. Sia $u = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$.
Allora $\lambda u = (\lambda a_1) u_1 + \dots + (\lambda a_m) v_m$. Quindi

$$[u]_{v_1 \dots v_m} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad e \quad [\lambda u] = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_m \end{pmatrix}$$

ovvero

$$[\lambda u]_{v_1 \dots v_m} = \lambda [u]_{v_1 \dots v_m}$$

- Se $F, G : V \longrightarrow W$ sono lineari e $\lambda \in K$ posso definire due nuove applicazioni lineari

$$F + G : V \longrightarrow W$$
$$\lambda F : V \longrightarrow W$$

mediante

$$(F+G)(v) = F(v) + G(v)$$
$$(\lambda F)(v) = \lambda \cdot F(v).$$

Verifichiamo che $F + G$ è lineare.

1) Siano $u, v \in V$.

$$(F+G)(u+v) \overset{\text{def. di } F+G}{=} F(u+v) + G(u+v)$$

lin di F e G $\rightarrow$ $= F(u) + F(v) + G(u) + G(v)$

$$= \big(F(u)+G(u)\big) + \big(F(v)+G(v)\big)$$

$$= (F+G)(u) + (F+G)(v)$$

2) Sia $v \in V$ e sia $\lambda \in K$

$$(F+G)(\lambda v) = F(\lambda v) + G(\lambda v)$$

$$= \lambda F(v) + \lambda G(v)$$

$$= \lambda \big(F(v) + G(v)\big)$$

$$= \lambda (F+G)(v)$$

La verifica che λF è lineare la lasciamo per esercizio.

- Quando abbiamo studiato la traccia e la trasposta in particolare tra le proprietà dimostrate abbiamo verificato che

$$Tr : Mat_{n\times n}(K) \longrightarrow K \qquad \text{la traccia}$$

$$T : Mat_{l\times m}(K) \longrightarrow Mat_{m\times l} \qquad T(A) = A^t$$

sono applicazioni lineari (anche se non usavamo queste parole) ovvero $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$ $\quad Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ e similmente per la trasposta

NUCLEO E IMMAGINE

DEFINIZIONE Siano V e W due K-spazi vettoriali e sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare.

Il nucleo di F che si indica con $N(F)$ o $\ker F$ è il seguente insieme

$$N(F) = \{ v \in V : F(v) = 0 \}.$$

L'immagine di F, che si indica con $\mathrm{Im}\, F$, è l'insieme

$$\mathrm{Im}(F) = \{ F(v) : v \in V \}$$

Esempio Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Vogliamo capire come sono fatti nucleo e immagine dell'applicazione $F = L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Il nucleo. Il nucleo di F è fatto dei vettori $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tali che $F(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ovvero

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \\ 3x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

quindi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in N(F)$ se e solo se

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad x = -2y$$

quindi $N(F) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Per esempio $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in N(F)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin N(F)$

L'immagine Prima di descrivere l'immagine in generale, provate a stabilire, come esercizio se questi due vettori sono nell'immagine

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = L_A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e quindi è nell'immagine

$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è nell'immagine. Infatti un vettore w

sta nell'immagine se e solo se $\exists\, u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tale che $L_A(u) = w$ ovvero

$$\begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \\ 3x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero se il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases}$$ ha soluzione

nel nostro caso otteniamo

$$\begin{cases} x = 1 - 2y \\ 2 - 4y + 4y = 1 \\ 3 - 6y + 6y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 2 = 1 \\ 3 = 1 \end{cases}$$

che chiaramente non ha soluzione perché $2 \neq 1$.

Più in generale $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} F$ se il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + 4y = b \\ 3x + 6y = c \end{cases}$$ ha soluzione

$$\begin{cases} x = a - 2y \\ 2a - 4y + 4y = b \\ 3a - 6y + 6y = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a - 2y \\ 2a = b \\ 3a = c \end{cases}$$

quindi il sistema ha soluzione se e solo se $b = 2a$ $c = 3a$

ovvero $\operatorname{Im} F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

PROPOSIZIONE

Siano V, W due K-spazi vettoriali e $F: V \to W$ una applicazione lineare allora

1) $N(F)$ è un sottosp. vettoriale di V

2) F è iniettiva se e solo se $N(F) = \{0_V\}$

dim.

1) Abbiamo già osservato che $F(0_V) = 0_W$, quindi $0_V \in N(F)$

Supponiamo ora che $u, v \in N(F)$ allora

$$F(u+v) = F(u) + F(v) = 0_W + 0_W = 0_W$$

quindi $u+v \in N(F)$.

Infine se $u \in N(F)$ e $\lambda \in K$ allora

$$F(\lambda u) = \lambda F(u) = \lambda 0_W = 0_W$$

quindi $\lambda u \in N(F)$.

2) Supponiamo che F sia iniettiva. Se $u \in N(F)$ allora

$$F(u) = 0_W = F(0_V)$$

e dall'iniettività ricaviamo $u = 0_V$. Quindi $N(F) = \{0_V\}$

Viceversa sia $N(F) = \{0_V\}$ e supponiamo che $F(u) = F(v)$

Allora

$$F(u-v) = F(u) - F(v) = 0_W.$$

quindi $u - v = 0_V$ ovvero $u = v$.

#

PROPOSIZIONE

Siano V, W due K-spazi vettoriali e $F: V \to W$ una applicazione lineare allora

1) $\operatorname{Im} F$ è un sottospazio vettoriale

2) F è surgettiva se e solo se $\operatorname{Im} F = W$

dim

1) $0_W = F(0_V) \in \operatorname{Im} F$

Se $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} F$ allora $\exists\, u_1$ e $u_2 \in V$ con $w_1 = F(u_1)$ e $w_2 = F(u_2)$. Allora

$$w_1 + w_2 = F(u_1) + F(u_2) = F(u_1 + u_2) \in \operatorname{Im} F$$

Infine se $w \in \operatorname{Im} F$ e $\lambda \in K$ allora $\exists\, u : F(u) = w$ e

$$\lambda w = \lambda F(u) = F(\lambda u) \in \operatorname{Im} F$$

2) questo è un fatto che abbiamo già osservato per una funzione generale che non ha nulla a che fare con la linearità

#

APPLICAZIONI LINEARI E BASI

Come abbiamo visto un modo di descrivere gli elementi di uno spazio vettoriale è quello di fissare una base e quindi introdurre delle coordinate. La proposizione seguente mostra come possiamo determinare una applicazione lineare fissando arbitrariamente il suo valore su una base dello spazio vettoriale di partenza.

PROPOSIZIONE

Sia V uno spazio vettoriale e sia $v_1, v_2, \dots, v_n$ una base di V. Sia W un secondo spazio vettoriale e siano $w_1, w_2, \dots, w_n \in W$ (in questo caso no chiediamo che siano una base). Allora esiste una unica applicazione lineare $F: V \to W$ tale che $F(v_1) = w_1$; $F(v_2) = w_2$; $\dots$; $F(v_n) = w_n$.

dim. Se $v \in V$ sappiamo che si può scrivere in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$, sia

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n .$$

Dalle osservazione fatte subito dopo la definizione di applicazione lineare ricaviamo

$$F(v) = \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_n F(v_n) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$$

Questa formula determina come si debba calcolare F e in particolare ne dimostra l'unicità. Dimostriamo ora che la F così definita è lineare. Siano $u, v \in V$ e sia

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

quindi $v + u = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) v_n$ e

$$\begin{aligned} F(v+u) &= (\lambda_1+\mu_1) w_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) w_n = \\ &= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_m + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n \\ &= F(v) + F(u) \end{aligned}$$

Se inoltre $\lambda \in K$ ricaviamo $\lambda v = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_n) v_n$ e

$$F(\lambda v) = \lambda \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda \lambda_n w_n = \lambda (\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n) = \lambda F(v)$$ #

Una conseguenza della proposizione appena dimostrata è che ogni applicazione lineare da K^m a K^l è della forma L_A per una opportuna matrice A. Sia infatti $F: K^m \longrightarrow K^l$ e sia $e_1, \dots, e_m$ la base standard di K^m. Sia $w_1 = F(e_1) \dots w_m = F(e_m)$.
Si consideri la matrice

$$A = (w_1 \dots w_m)$$

Allora sappiamo che $L_A(e_i) = w_i = F(e_i)$. Essendo L_A e F lineari dalla proposizione ricaviamo $L_A = F$

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

Come abbiamo appena visto ogni applicazione lineare da K^m a K^l è della forma L_A. In questa sezione mostriamo come utilizzare le matrici per descrivere le applicazioni lineari tra spazi vettoriali che non siano K^m.

DEFINIZIONE (calcolo della matrice associata)

Siano V e W due K-spazi vettoriali e sia $F: V \longrightarrow W$ una applicazione lineare.
Sia inoltre $v_1 \dots v_m$ una base di V e
$w_1 \dots w_l$ una base di W
La matrice associata ad F rispetto alle basi $v_1 \dots v_m$ e

$w_1 \dots w_l$ è una matrice $l \times m$ che si indica con

$$[F]^{v_1 \dots v_m}_{w_1 \dots w_l}$$

e le cui colonne sono le coordinate dei vettori $F(v_j)$ rispetto alla base $w_1 \dots w_l$. Più esplicitamente supponiamo di voler calcolare la colonna j-esima di questa matrice. Consideriamo allora $F(v_j)$ e lo esprimiamo nella base $w_1 \dots w_l$ ovvero

$$F(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots + a_{lj} w_l$$

ovvero

$$[F(v_j)]_{w_1 \dots w_l} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{lj} \end{pmatrix}.$$

Questa sarà la colonna j-esima della matrice $[F]^{v_1 \dots v_m}_{w_1 \dots w_l}$

Esempio

Sia $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$. Sia $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$$

Consideriamo la base $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ di V

e la base $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calcoliamo $[F]^{v_1 \, v_2}_{w_1 \, w_2 \, w_3}$.

Calcoliamo $F(v_1)$ e scriviamolo nella base $w_1\ w_2\ w_3$

$$F(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = a\, w_1 + b\, w_2 + c\, w_3 = \begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ a+b-c \end{pmatrix}$$

ricaviamo
$$\begin{cases} a = 4 \\ a+b+c = 3 \\ a+b-c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 4 \\ b+c = -1 \\ b-c = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 4 \\ b = -5/2 \\ c = 3/2 \end{cases}$$

quindi la prima colonna della matrice è $\begin{pmatrix} 4 \\ -5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Ora facciamo un calcolo analogo per $F(v_2)$

$$F(v_2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\, w_1 + \beta\, w_2 + \gamma\, w_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+\beta+\gamma \\ \alpha+\beta-\gamma \end{pmatrix}$$

e con conti analoghi ricaviamo $\alpha = 7 \quad \beta = -\frac{9}{2} \quad \gamma = \frac{3}{2}$

Quindi

$$[F]^{v_1\, v_2}_{w_1\, w_2\, w_3} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5/2 & -9/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Se invece avessimo scelto le basi standard avremmo ottenuto

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 - e_3$$

$$F(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + e_2 + e_3$$

Quindi
$$[F]^{e_1\ e_2}_{e_1\ e_2\ e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>

Se $F = L_A : K^m \to K^l$ allora

$$[L_A]^{e_1 \dots e_m}_{e_1 \dots e_l} = A$$

infatti $L_A(e_j) = j$-esima colonna di A

$$= a_{1j} e_1 + \dots + a_{lj} e_l$$

L'ultimo esempio mostra come quando calcoliamo la matrice associata ad una applicazione lineare da K^m a K^l rispetto alle basi standard otteniamo la relazione già spiegata in precedenza tra matrici e applicazioni lineari da K^m a K^l.
Spieghiamo ora il significato della matrice associata nel caso generale. Il significato è molto sinteticamente il seguente:
la matrice associata descrive una applicazione lineare una volta che sui due spazi vettoriali sono state introdotte delle coordinate.

PROPOSIZIONE

Sia $v_1 \dots v_n$ una base di V

Sia $w_1 \dots w_\ell$ una base di W

Sia $F: V \to W$ una applicazione lineare

Allora

$$\boxed{[F(v)]_{w_1 \dots w_\ell} = [F]^{v_1 \dots v_m}_{w_1 \dots w_\ell} \cdot [v]_{v_1 \dots v_m}}$$

dim

Sia $u_1 = [F(v_1)]_{w_1 \dots w_\ell} \quad \dots \quad u_m = [F(v_m)]_{w_1 \dots w_\ell}$

quindi

$$A = [F]^{v_1 \dots v_m}_{w_1 \dots w_\ell} = (u_1 \dots u_m)$$

Siano inoltre $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_m \end{pmatrix} = [v]_{v_1 \dots v_m}$ le coordinate di v rispetto alla base $v_1 \dots v_m$. Quindi

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$$

da cui $F(v) = \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_m F(v_m)$. Calcoliamo ora le coordinate di $F(v)$:

$$[F(v)]_{w_1 \dots w_\ell} = \lambda_1 [F(v_1)]_{w_1 \dots w_\ell} + \dots + \lambda_m [F(v_m)]_{w_1 \dots w_\ell}$$

$$= \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m$$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$= [F]^{v_1 \dots v_m}_{w_1 \dots w_\ell} [v]_{v_1 \dots v_m}$$

#

OSSERVAZIONE

La proprietà della matrice associata ad una applicazione lineare appena dimostrata caratterizza la matrice associata, in questo senso.
Sia $F: V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare sia $v_1 \dots v_m$ una base di V e sia $w_1 \dots w_l$ una base di W e sia A una matrice $l \times m$. Se

$$[F(v)]_{w_1 \dots w_l} = A \cdot [v]_{v_1 \dots v_m}$$

allora $A = [F]^{v_1 \dots v_m}_{w_1 \dots w_l}$

dimostrazione

Siano $C_1 \dots C_m$ le colonne della matrice.
Dimostriamo che C_j è uguale alla j-esima colonna della matrice $[F]^{v_1 \dots v_m}_{w_1 \dots w_l}$ ovvero al vettore colonna $[F(v_j)]_{w_1 \dots w_l}$. Infatti

$$[F(v_j)]_{w_1 \dots w_l} = A\,[v_j]_{v_1 \dots v_m} = (C_1 \dots C_m)\, e_j = C_j$$

dimostrando la tesi

#

Esercizio

Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione $x + 2y = 0$ e sia $S: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la simmetria rispetto a questo piano

1) Calcolare $[S]_{e_1 \; e_2 \; e_3}^{e_1 \; e_2 \; e_3}$

2) Sia $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Questa è una base di $\mathbb{R}^3$ (non c'è bisogno di verificarlo). Calcolare $[S]_{w_1 \; w_2 \; w_3}^{w_1 \; w_2 \; w_3}$

Svolgimento

1) Sia $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora W è il piano per l'origine ortogonale a $\mathbb{R}u$. Abbiamo visto che

$$S v = v - 2 \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u = v -$$

Per calcolare la matrice associata a S abbiamo calcolare $S(e_1)$ $S(e_2)$ $S(e_3)$

$$S(e_1) = e_1 - 2 \frac{1}{5} (e_1 + 2e_2) = \frac{3}{5} e_1 - \frac{4}{5} e_2$$

$$S(e_2) = e_2 - 2 \frac{2}{5} (e_1 + 2e_2) =$$

$$S(e_3) = e_3$$

quindi

$$[S]_{e_1 \; e_2 \; e_3}^{e_1 \; e_2 \; e_3} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Osserviamo che w_2 w_3 e che $w_1 = u$

$$S(w_2) = w_2$$

$$S(w_3) = w_3$$

$$S(w_1) = w_1 - 2w_1 = -w_1$$

quindi

$$[S]_{w_1\, w_2\, w_3}^{w_1\, w_2\, w_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

APPLICAZIONE ASSOCIATA A UNA MATRICE

Vogliamo fare una ultima osservazione sulle matrice associate. Sia V uno sp. vettoriale con base $v_1 \dots v_m$, che indicherò con $\underline{v}$, e W uno sp. vett. con base $w_1 \dots w_\ell$, che indicherò con $\underline{w}$. Abbiamo visto come associare ad una applicazione lineare $F : V \to W$ una matrice $[F]_{\underline{w}}^{\underline{v}}$ che è $\ell \times m$. Viceversa se A è una matrice $\ell \times m$ esiste una unica applicazione lineare $F : V \to W$ tale che $A = [F]_{\underline{w}}^{\underline{v}}$. Se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots\ell \\ j=1\dots m}}$ grazie a quanto detto nella sezione "applicazioni lineari e basi" esiste una unica $F : V \longrightarrow W$ tale che

$$F(v_j) = a_{1j}\, w_1 + \dots + a_{\ell j}\, w_\ell$$

e questa è la F cercata.

Quindi abbiamo una corrispondenza perfetta tra applicazioni lineari e matrici. Notiamo inoltre che

$$[F+G]_{\underline{w}}^{\underline{v}} = [F]_{\underline{w}}^{\underline{v}} + [G]_{\underline{w}}^{\underline{v}}$$

e che

$$[\lambda F]_{\underline{w}}^{\underline{v}} = \lambda\, [F]_{\underline{w}}^{\underline{v}}$$

MATRICI DI CAMBIAMENTO DI BASE

Sia V uno spazio vettoriale e siano

$\underline{v}$: $v_1 \dots v_m \in V$ una base

$\underline{w}$: $w_1 \dots w_n \in V$ una seconda base

Se $v \in V$ possiamo calcolare le coordinate rispetto alla base $\underline{v}$ o alla base $\underline{w}$ ottenendo:

$$[v]_{\underline{v}} \qquad\qquad [v]_{\underline{w}}$$

Vogliamo capire come calcolare le seconde sapendo le prime, o viceversa. Nella formula della lezion precedente consideriamo $F = Id_V$, allora

$$[v]_{\underline{w}} = [Id_V]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot [v]_{\underline{v}} \, .$$

Le matrici $[Id_V]^{\underline{v}}_{\underline{w}}$ e $[Id]^{\underline{w}}_{\underline{v}}$ si chiamano matrici cambiamento di base, la prima dalla base $\underline{v}$ alla base $\underline{w}$, la seconda viceversa.

Esercizio

Sia $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e sia $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Quali sono le coordinate di v rispetto alla base v_1, v_2?

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sono le coordinate rispetto alla base e_1, e_2 quindi dobbiamo calcolare $[Id]^{e_1 \, e_2}_{v_1 \, v_2}$

Abbiamo, dopo qualche conto,

$$e_1 = 2v_1 - v_2$$
$$e_2 = -v_1 + v_2$$

quindi
$$[Id]^{e_1\ e_2}_{v_1\ v_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi
$$[v]_{v_1, v_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + y \end{pmatrix}$$

Osserviamo che se $A = [Id]^{\underline{v}}_{\underline{w}}$ e $B = [Id]^{\underline{w}}_{\underline{v}}$

e se
$$\underline{x} = [v]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{y} = [v]_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

abbiamo $\forall \underline{x}$ e $\forall \underline{y}$
$$A \cdot \underline{x} = \underline{y} \quad e \quad B \cdot \underline{y} = \underline{x}$$

e quindi anche
$$A \cdot B \cdot \underline{y} = \underline{y} \quad e \quad B \cdot A \cdot \underline{x} = \underline{x}$$

ovvero $A \cdot B = I$ e $B \cdot A = I$, in particolare

$[Id]^{\underline{v}}_{\underline{w}}$ e $[Id]^{\underline{w}}_{\underline{v}}$ sono invertibili e sono una l'inversa dell'altra.