MATRICI

Una tabella rettangolare di numeri, come

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & \sqrt{2} & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

si dice una matrice. Più precisamente se K è un campo una tabella con l righe e m colonne di elementi di K si dice una matrice $l \times m$ a coefficienti in K. Per esempio la matrice iniziale è una matrice 3×4 a coefficienti in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ (ma non in $\mathbb{Q}$), mentre la seguente è una matrice 4×2 a coefficienti in $\mathbb{C}$

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & \sqrt{2} \\ 0 & 3 \\ 1 & -i \\ 3i & 4+5i \end{pmatrix}$$

L'elemento di K che si trova nella riga i-esima colonna j-esima si chiama l'entrata (i,j) della matrice. Per esempio l'entrata $(3,2)$ della matrice A è uguale a $\sqrt{2}$ mentre l'entrata $(2,1)$ della matrice B è uguale a 3. L'insieme delle matrici $l \times m$ a coefficienti in K si indica con

$$\mathrm{Mat}_{l \times m}(K) = \{ \text{matrici } l \times m \text{ a coeff. in } K \}.$$

<u>OSSERVAZIONE</u> Per $l = 1$ $m = n$ $\mathrm{Mat}_{1 \times n}(K) = K^n$ mentre per $l = n$ $m = 1$ otteniamo quelli che abbiamo chiamato vettori colonna e che pure identifichiamo con K^n

<u>OSSERVAZIONE</u> Quando dovremo lavorare con matrici generiche o quando vorremo indicare l'entrata ij di una matrice useremo i pedici ij come nella seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & \dots & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix}$$

SOMMA E PRODOTTO PER SCALARE

La somma di due matrici e il prodotto di un numero e una matrice sono definiti coordinata per coordinata in modo del tutto analogo a quanto fatto per K^n.

Per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1,2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3,3 & 2 \\ 1,3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-1 \\ 5+3,3 & 0+2 \\ 1,2+1,3 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8,3 & 2 \\ 2,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1,2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot\frac{1}{3} \\ 3\cdot 1,2 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3,6 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

In generale la somma di due matrici $l \times m$ è definita da

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & \dots & & \\ a_{l1} & \dots & & a_{lm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ & & \dots & \\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{lm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ & \dots & & \\ a_{l1}+b_{l1} & a_{l2}+b_{l2} & \dots & a_{lm}+b_{lm} \end{pmatrix}$$

e il prodotto di un numero per una matrice $l \times m$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & & \dots & \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ & & & \\ \lambda a_{l1} & \lambda a_{l2} & \dots & \lambda a_{lm} \end{pmatrix}$$

la matrice zero è la matrice con tutte entrate uguali a zero

$$O_{l \times m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

<u>PROPOSIZIONE</u> $Mat_{l \times m}(K)$ con somma, prodotto per scalare e zero appena definiti è uno spazio vettoriale su K.

La dimostrazione di questa proposizione è del tutto simile a quella di K^n, e viene lasciata come esercizio.

LA BASE CANONICA DI $Mat_{l \times m}(K)$

Lo spazio vettoriale delle matrici ha una base del tutto simile a quella di K^n. Sia

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \text{colonna } j & \\ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} & \text{— riga } i \end{array}$$

la matrice che ha tutte le entrate uguale a zero tranne l'entrata nella riga i, colonna j che è uguale a 1. Gli elementi

$$E_{11}\ E_{12}\ \dots\ E_{1m}\ E_{21}\ E_{22}\ \dots\ E_{2m}\ \dots\ E_{\ell 1}\ \dots\ E_{\ell m}$$

formano una base di $Mat_{\ell\times m}(K)$. La dimostrazione è del tutto simile a quella di K^n, esplicitiamola nel caso $\ell = 2$ $m = 3$. Abbiamo

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{12} + \lambda_3 E_{13} + \lambda_4 E_{21} + \lambda_5 E_{22} + \lambda_6 E_{23} =$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{pmatrix}$$

quindi se voglio che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{12} + \lambda_3 E_{13} + \lambda_4 E_{21} + \lambda_5 E_{22} + \lambda_6 E_{23}$$

deve essere $\lambda_1 = a_{11}$ $\lambda_2 = a_{12}$ $\lambda_3 = a_{13}$ $\lambda_4 = a_{21}$ $\lambda_5 = a_{22}$ $\lambda_6 = a_{23}$.

TRACCIA E TRASPOSTA, MATRICI SIMMETRICHE

Se A è una matrice quadrata, ovvero se A è una matrice $n \times n$ la traccia di A è definita come la somma degli elementi lungo la diagonale.

Per esempio

$$\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

La Traccia verifica le seguenti proprietà

$$\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B) \qquad \forall A, B \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(K)$$

$$\operatorname{Tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{Tr}(A) \qquad \forall A \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(K)\ \forall \lambda \in K$$

Esercizio Verificare la validità di queste proprietà.

Un'altra operazione che incontreremo spesso parlando di matrici è quella della trasposta. Se A è una matrice $l \times n$, allora la trasposta di A, che si indica con A^t è la matrice $n \times l$ che si ottiene ribaltando la tabella lungo la diagonale. Equivalentemente possiamo dire che la matrice trasposta è quella che si ottiene scambiando righe e colonne. Per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Più in generale se A è una matrice $\ell \times m$ con entrate uguali ad a_{ij}, la trasposta è una matrice $m \times \ell$ la cui entrata (i,j) sarà uguale ad a_{ji}.

La trasposta verifica le seguenti proprietà

- $(A+B)^t = A^t + B^t \qquad \forall A, B \in Mat_{\ell \times m}(K)$
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t \qquad \forall A \in Mat_{\ell \times m}(K)$ e $\forall \lambda \in K$
- $Tr(A^t) = Tr(A) \qquad \forall A \in Mat_{m \times m}(K)$

<u>Esercizio</u> Verificare la validità di queste proprietà.

Una matrice A, $m \times m$ si dice <u>simmetrica</u> se è uguale alla sua trasposta, ovvero $A^t = A$. Definiamo

$$Mat\,sim_m(K) = \{ A \in Mat_{m \times m}(K) : \ A^t = A \}$$

Una matrice A, $m \times m$ si dice <u>antisimmetrica</u> se è uguale all'opposto della sua trasposta, ovvero se $A^t = -A$. Definiamo

$$Mat\,antisim_m(K) = \{ A \in Mat_{m \times m}(K) : \ A^t = -A \}$$

Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$ è simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ è antisimmetrica

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$ non è né simmetrica né antisimmetrica

Esercizio

- Se A è simmetrica e antisimmetrica allora $A = 0$
- Se A è antisimmetrica allora $Tr(A) = 0$
- $Matsim_m(K)$ e $Matantisim_m(K)$ sono sottospazi vettoriali di $Mat_{m \times m}(K)$.

L'APPLICAZIONE L_A

Sia A una matrice $l \times m$ e siano $v_1, \dots, v_m$ le sue colonne. Quindi $v_i \in K^l$ per $i=1,\dots,m$ sono m vettori colonna e $A = (v_1 \dots v_m)$.

Per esempio se A è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ le sue colonne sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Torniamo ora al caso di una matrice generale $\ell \times m$ A di colonne $v_1 \dots v_m$.

Consideriamo l'applicazione $L_A : K^m \longrightarrow K^\ell$ definita da

$$\boxed{L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m}$$

più esplicitamente se $A = (a_{ij})$ abbiamo

$$\boxed{L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2m} x_m \\ \dots \\ a_{\ell 1} x_1 + \dots + a_{\ell m} x_m \end{pmatrix}} \qquad (*)$$

Indichiamo questo risultato con

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

e diciamo che è il prodotto di A con il vettore colonna $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

<u>Esempio</u> Calcoliamo $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

usando la definizione otteniamo

$$= 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -2 \end{pmatrix}$$

usando $(*)$ (come spesso faremo)

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 6 \\ 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 - 1 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Osservazione

Osserviamo che $L_A(e_i) = v_i$.

In particolare se $L_A = L_B$ allora $A = B$.

Infatti se $L_A = L_B$ allora $L_A(e_i) = L_B(e_i)$

quindi A e B hanno le stesse colonne e

quindi sono uguali.

Proposizione $\forall u, w \in K^m \quad \forall \lambda \in K \quad \forall A, B \in Mat_{\ell \times m}$

1) $L_A(0_{K^m}) = 0_{K^\ell}$ ovvero $A \cdot 0_{K^m} = 0_{K^\ell}$

2) $L_A(u+w) = L_A(u) + L_A(v)$ ovvero

$A \cdot (u+w) = A \cdot u + A \cdot v$

2') $L_{A+B}(u) = L_A(u) + L_B(u)$

$(A+B) \cdot u = A \cdot u + B \cdot u$

3) $L_A(\lambda u) = \lambda L_A(u) = L_{\lambda A}(u)$ ovvero

$A \cdot (\lambda u) = \lambda (A \cdot u) = \lambda A \cdot u$

dim

1) $L_A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_m = 0$

2) se $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$$L_A(u+v) = (x_1+y_1)v_1 + \cdots + (x_m+y_m)v_m$$

$$= x_1v_1 + \cdots + x_mv_m + y_1v_1 + \cdots + y_mv_m$$

$$= L_A(u) + L_A(w)$$

2') è lasciato per esercizio.

3) Sia $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ allora

$$L_A(\lambda u) = (\lambda x_1)v_1 + \cdots + (\lambda x_m)v_m$$

$$= \lambda(x_1v_1 + \cdots + x_mv_m) = \lambda(L_A(\ ))$$

$$= x_1(\lambda v_1) + \cdots + x_m(\lambda v_m) = L_{\lambda A}(u)$$

#

PRODOTTO DI MATRICI

Consideriamo due matrici A $l \times m$ e B $m \times p$. Allora abbiamo

$$L_B : K^p \to K^m \quad e \quad L_A : K^m \longrightarrow K^l$$

Quando ne facciamo la composizione

$$L_A \circ L_B : K^p \longrightarrow K^l.$$

Vogliamo capire come è fatta questa applicazione. Diamo un nome alle colonne di B.

Sia

$$B = (u_1 \dots u_p) \quad \text{con} \quad u_i \in K^m$$

Allora

$$L_A\left(L_B\left(\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{matrix}\right)\right) = L_A(x_1 u_1 + \dots + x_p u_p)$$ def. di L_B

$$= x_1 L_A(u_1) + \dots + x_p L_A(u_p)$$ Proposiz. precedente.

quindi se chiamiamo

$$w_1 = L_A(u_1) = A \cdot u_1 \quad \dots \quad w_p = L_A(u_p) = A \cdot u_p \in K^l$$

e $C = (w_1 \dots w_p)$

Abbiamo $L_A \circ L_B = L_C$.

Definiamo

$$\boxed{A \cdot B = (A \cdot u_1 \dots A \cdot u_p)}$$

e chiamiamo questa nuova matrice il prodotto di A e B e è una matrice $l \times p$. La discussione fatta mostra che

$$\boxed{L_A \circ L_B = L_{A \cdot B}}$$

Sottolineiamo alcune caratteristiche del prodotto tra matrici

1) Se A è una matrice $l \times m$ e B è una matrice $m \times p$ il prodotto $A \cdot B$ è una matrice $l \times p$
2) Se A è una matrice $l \times m$ e B è una matrice $q \times p$ il prodotto $A \cdot B$ è definito solo quando $m = q$.
   Per esempio il prodotto di una matrice 2×2 e di una matrice 3×3 non è definito.
3) Può succedere che sia definito il prodotto $A \cdot B$ ma che non sia definito il prodotto $B \cdot A$
   Per esempio se A è 2×2 e B è 2×3

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+3\times 3 & 3 & 2 \\ 4+6\times 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 2 \\ 22 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Mostriamo ora un modo del tutto equivalente di calcolare il prodotto. Sia

$$A = (a_{ij}) \quad \text{una matrice } l \times m$$
$$B = (b_{ij}) = (u_1 \dots u_p) \quad \text{una matrice } m \times p$$

e sia

$$C = A \cdot B = (c_{ij}) \quad \text{il prodotto}$$

Allora se vogliamo calcolare c_{ij} siamo interessati alla i-esima riga della j-esima colonna di C ovvero alla i-esima entrata di $A u_j$ ovvero alla i-esima entrata di

$$A \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$$

La i-esima entrata è $a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}$

Quindi

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}}$$

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = C$ è una matrice 3×2

Se voglio calcolare l'entrata c_{21} di C devo considerare la 2^a riga di A e moltiplicarla per la 1^a colonna di B

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 + 1 = 3$$

<u>Esempi</u> Il prodotto di matrici non ha alcune delle proprietà del prodotto di numeri.

- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  quindi può essere $A \cdot B = 0$ ma $A \neq 0$ e $B \neq 0$

- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  quindi può essere $AB = 0$ ma $BA \neq 0$
  e in particolare in generale $AB \neq BA$.

Altre proprietà invece continuano a valere. Quelle più semplici e fondamentali sono quelle della proposizione seguente

PROPOSIZIONE (PROPRIETÀ DEL PRODOTTO TRA MATRICI)

1) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \forall A \in Mat_{\ell \times m} \quad \forall B, C \in Mat_{m \times p}$

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad \forall A, B \in Mat_{\ell \times m} \quad \forall C \in Mat_{m \times p}$

3) $A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda (A \cdot B) \quad \forall A \in Mat_{\ell \times m} \quad \forall B \in Mat_{m \times p} \quad \forall \lambda \in K$

4) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \forall A \in Mat_{\ell \times m} \quad \forall B \in Mat_{m \times p} \quad \forall C \in Mat_{p \times q}$

dim

La dimostrazione di 1), 2), 3) è semplice e è del tutto analoga a dimostrazioni fatte in precedenza.
La dimostrazione di 4), se presa di petto è un conto istruttivo ma corposo. Ne diamo un'altra spiegazione, senza conti.
Ricordiamo che $L_A \circ L_B = L_{A \cdot B}$ e quindi

$$(L_A \circ L_B) \circ L_C = L_{(A \cdot B) \cdot C}$$

Similmente $L_A \circ (L_B \circ L_C) = L_{A \cdot (B \cdot C)}$

La composizione di funzioni è associativa, infatti

$$(L_A \circ L_B) \circ L_C (v) = L_A (L_B (L_C (v))) = L_A \circ (L_B \circ L_C) (v)$$

quindi

$$L_{(A \cdot B) \cdot C} = L_{A \cdot (B \cdot C)}$$

Ma abbiamo già osservato che se $L_D = L_E$ allora $D = E$,
quindi $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ #

Esercizio Dimostrare le proprietà 1.

LA MATRICE IDENTITÀ

Se $l \geq 1$ la matrice identità $l \times l$ è la matrice

$$I_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $L_{I_l} = Id_{K^l}$ e che $I_l \cdot A = A$ e $A \cdot I_m = A$ $\forall$ matrice A $l \times m$.

ALTRE OSSERVAZIONI SULLE MATRICI

• PRODOTTO, TRACCIA E TRASPOSTA

Se A è una matrice 2×3 e B è una matrice 3×4 allora possiamo effettuare il prodotto $A \cdot B$ che è una matrice 2×4.

La trasposta di A è una matrice 3×2 e la trasposta di B è una matrice 4×3.

Non ha quindi senso fare $A^t \cdot B^t$, ha invece senso fare $B^t \cdot A^t$ che è una matrice 4×2 proprio come la trasposta di $A \cdot B$.

PROPOSIZIONE Sia $A \in Mat_{\ell \times m}(K)$ e $B \in Mat_{m \times p}(K)$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

dim $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$

Sia $C = A \cdot B = (c_{ij})$ e sia $D = B^t \cdot A^t = (d_{ij})$

vogliamo mostrare che $C^t = D$ ovvero che l'entrata (i,j) della matrice D è uguale all'entrata (j,i) della matrice C.

Facciamo il caso $i = 2$ $j = 3$ (tanto per fissare le idee e aiutare a visualizzare il ragionamento)

L'entrata $(3, 2)$ della matrice C è uguale a

$$c_{32} = a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} + \cdots + a_{3m} b_{m2}.$$

L'entrata $(2, 3)$ della matrice D si ottiene moltiplicando le entrate della 2^a riga della matrice B^t con le entrate della 3^a colonna della matrice A^t. Ora la 2^a riga della matrice B^t sono in realtà le entrate della 2^a colonna della matrice B

$$(b_{12}, b_{22}, b_{32} \cdots b_{m2}).$$

Le entrate della 3^a colonna della matrice A^t sono le entrate della 3^a riga della matrice A e quindi sono

$$\begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{3m} \end{pmatrix}$$

quindi

$$d_{23} = b_{12} a_{31} + \cdots + b_{m2} a_{3m} = c_{32}$$ come volevamo #

Proviamo ora a calcolare la traccia di un prodotto
Se A è una matrice 2×3 e B è una matrice 3×2
la sensata sia calcolare sia la traccia di $A \cdot B$
che è una matrice 2×2 che di $B \cdot A$ che è una matrice
3×3.

<u>PROPOSIZIONE</u> Sia $A \in Mat_{\ell \times m}$ e $B \in Mat_{m \times \ell}$.
Allora

$$Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$$

<u>dim.</u>

Sia $C = A \cdot B = (c_{ij})$

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1m} b_{m1} = \sum a_{1i} \cdot b_{i1}$$
$$c_{22} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} + \dots + a_{2m} b_{m2} = \sum a_{2i} \cdot b_{i2}$$
$$\vdots$$
$$c_{\ell\ell} = a_{\ell 1} b_{1\ell} + a_{\ell 2} b_{2\ell} + \dots + a_{\ell m} b_{m\ell} = \sum a_{\ell i} b_{i\ell}$$

quindi $Tr(C) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ji}$

Un analogo conto fornisce

$$Tr(D) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\ell} b_{ji} a_{ij}$$

ma le due somme coincidono #

Nello spazio vettoriale delle matrici quadrate ci sono alcuni sottospazi che troveremo spesso. Abbiamo già visto le matrici simmetriche e quelle antisimmetriche. Due altri sottospazi importanti sono quelli delle matrici diagonali e delle matrici triangolari.

Una matrice si dice diagonale se le entrate fuori dalla diagonale $i=j$ della matrice sono uguali a zero. Per esempio le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sono matrici diagonali. Se

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

e A è una matrice $l \times 3$ $\quad A = (v_1 \; v_2 \; v_3)$

allora

$$A \cdot D = (a v_1 \quad b v_2 \quad c v_3).$$

Se B è una matrice $3 \times m$ con $B = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

dove $u_1 \; u_2 \; u_3$ sono le righe di B allora

$$D \cdot B = \begin{pmatrix} a u_1 \\ b u_2 \\ c u_3 \end{pmatrix}$$

Più in generale se D è una matrice diagonale quando effettuiamo un prodotto $D \cdot B$ è come moltiplicare le righe di B per le entrate di D lungo la diagonale, e quando effettuiamo un prodotto $A \cdot D$ è come moltiplicare le colonne di A.

Una matrice si dice triangolare superiore se le entrate sotto la diagonale sono zero. Per esempio le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono matrici triangolari superiori.

Esercizio

Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\mathrm{Tr}(A^n)$ per ogni n.

MATRICI INVERTIBILI

(Di solito questa parte a lezione viene fatta dopo aver fatto le applicazioni lineari e la matrice associata ad una applicazione lineare)

DEFINIZIONE

Una matrice A $l \times m$ si dice invertibile se esistono una matrice B $m \times l$ e una matrice C $m \times l$ tali che
$$BA = I_m \quad \text{e} \quad AC = I_l$$

OSS Anticipo subito che se A è invertibile le matrici B e C sono uguali e sono univocamente determinate (questo lo vedremo tra un attimo), e tale matrice si indica con A^{-1} e si chiama l'inversa di A. Inoltre se A è invertibile, allora $m = l$, ovvero la matrice è quadrata (questo lo vedremo quando faremo i sistemi lineari).

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e supponiamo $ad - bc \neq 0$ e sia

$$B = C = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$ Allora

$$B \cdot A = A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Fare il conto per esercizio)

Esercizio

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A è invertibile.

Vediamo se esiste B tale che $BA = I_2$

Sia $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ e calcoliamo

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

quindi una qualsiasi matrice della forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & f \end{pmatrix}$

verifica $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ora vediamo se esiste C tale che $A \cdot C = I_3$.

Sia $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ e calcoliamo

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in particolare questa matrice non può mai essere uguale a I_3. Quindi C non esiste, in particolare A non è invertibile.

PROPOSIZIONE 1) Sia A una matrice $l \times m$ invertibile e siano B e C due matrici $m \times l$ tali che $BA = I_m$ e $AC = I_l$. Allora $B = C$.

2) Sia A una matrice invertibile $l \times m$, allora esiste una unica matrice B $m \times l$ tale che $BA = I_m$ e $AB = I_l$

dim

1) Sia $BA = I_m$ e $AC = I_l$.

Allora

$$B = B I_l = B(AC) = (BA)C = I_m C = C$$

e quindi $B = C$.

2) Siano B e D tali che $BA = I_m$ $AB = I_l$ e $DA = I_m$ e $AD = I_l$. Allora

$$B = B \cdot I_l = B(AD) = (BA)D = I_l D = D$$

e quindi $B = D$

#

Come abbiamo già detto se A è invertibile, l'unica matrice B tale che $BA = I$ e $AB = I$ si chiama l'inversa di A e si indica con A^{-1}

PROPOSIZIONE Siano A e B due matrici invertibili

Allora

1) A^{-1} è invertibile e $(A^{-1})^{-1} = A$

2) AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) A^t è invertibile e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

dimostrazione Sia A $\ell \times m$ e B $m \times p$

1) Sia $C = A^{-1}$ allora $AC = I_\ell$ e $CA = I_m$

Allora $A = C^{-1}$ ovvero $(A^{-1})^{-1} = A$

2) Sia $C = B^{-1}A^{-1}$. Per dimostrare che AB è invertibile e che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ basta verificare che

$$(AB)C = I_\ell \quad \text{e} \quad C(AB) = I_p$$

Verifichiamolo:

$$(AB)C = A(BC) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_mA^{-1} = $$
$$= AA^{-1} = I_\ell$$

$$C(AB) = (CA)B = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_mB$$
$$= B^{-1}B = I_p$$

3) Sia $C = (A^{-1})^t$. Per verificare che A^t è invertibile e che $(A^t)^{-1} = C$ basta verificare che

$$A^tC = I_m \quad \text{e} \quad CA^t = I_\ell$$

(questo lo lasciamo per esercizio, si ricordi che $(XY)^t = Y^tX^t$)

#