

## Indicazioni per lo studio e per gli esercizi per casa.

*Sabato 28 settembre.* Il materiale della lezione di questa settimana lo potete trovare nelle note sui richiami, fino a operazioni tra insiemi. Potete fare gli esercizi che trovate in queste note e i primi 10 esercizi del file degli esercizi per casa.

*Sabato 5 ottobre.* Il materiale della lezione di questa settimana lo potete trovare nelle note sui richiami, nella prima nota sui numeri complessi, e nella prima meta' della seconda nota sui numeri complessi. Potete fare i primi sei esercizi della sezione sui numeri complessi.

*Sabato 12 ottobre.* Il materiale della lezione di questa settimana lo potete trovare nella seconda nella terza nota sui numeri complessi. Potete fare i primi sei esercizi della sezione sui numeri complessi. Potete fare qualsiasi esercizio sui numeri complessi, forse sarebbe bene fare i secondi sei.

*Sabato 19 ottobre.* Il materiale della lezione di questa settimana lo potete trovare nella prima e nella seconda nota sulla geometria nello spazio. Potete fare gli esercizi 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.16.

*Sabato 26 ottobre.* Il materiale della lezione di mercoledì lo trovate nella seconda nota sulla geometria dello spazio. Il materiale delle lezioni di venerdì e sabato lo trovate sulle due note sugli spazi vettoriali. Potete fare tutti gli esercizi della sezione 4: vi consiglio di fare almeno il 4.3, 4.4 e il 4.5 (credo siano in ordine crescente di difficoltà). Potete fare anche gli esercizi della sezione 5: vi consiglio di fare almeno il 5.1, il 5.3 e il 5.5.

*Sabato 2 novembre.* Il materiale della lezione di mercoledì lo trovate nella nota sugli spazi vettoriali. Il materiale sulle funzioni lo trovate nella nota sui richiami e il materiale sulle matrici lo trovate nella primissima parte della nota sulle matrici. Potete fare qualsiasi esercizio delle sezioni 4 e 5 e l'esercizio 6.1.

*Sabato 9 novembre.* Il materiale sulle matrici lo trovate nella nota sulle matrici. Il materiale sulle applicazioni allineari relativo all'ultima ora della lezione di sabato lo trovate nella nota sulle applicazioni lineari. Potete fare qualsiasi esercizio della sezione sulle matrici. Consiglio, soprattutto a chi ha ancora qualche problema nel moltiplicare le matrici, di fare almeno il 6.2. Potete fare inoltre gli esercizi 7.1 e 7.2.

*Sabato 16 novembre.* Il materiale sulle applicazioni lineari e la matrice associata lo trovate nella nota sulle applicazioni lineari. Manca la parte sulla composizione e l'inversa che comparirà tra poco. Potete fare qualsiasi esercizio fino al 7.6.

*Sabato 23 novembre.* Il materiale fatto questa settimana lo trovate nella nota sui sistemi lineari e nella prima parte della nota sulla dimensione. Potete fare tutti gli esercizi della sezione 7 e gli esercizi della sezione 8, fino all'8.5. Potete fare anche l'esercizio 9.3. In particolare provate a fare l'esercizio 7.8.

*Sabato 7 dicembre.* Il materiale fatto la settimana passata lo trovate nelle note sulla dimensione e sulla descrizione dei sottospazi, mentre il materiale fatto questa settimana lo trovate nelle note sul determinante. Potete fare qualsiasi esercizio della sezione 9, 10 e 11, tranne il 10.9 e il 10.10. Consiglio di fare l'11.1, l'11.2 e l'11.4 per quanto riguarda la sezione 11. Per quanto riguarda la sezione 10 consiglio di fare almeno un esercizio su parametrizzazione e forma cartesiana, ce ne sono di più o meno difficili, dipende un po' del vostro livello attuale su questo argomento e consiglio di fare almeno un esercizio tra 10.5, 10.6, 10.7 e 10.11 (più o meno in ordine crescente di difficoltà).

*Sabato 14 dicembre.* Il materiale sul determinante lo trovate nell'ultima nota del semestre, mentre il materiale sui autovalori e autovettori lo trovate nel libro di martelli. Il materiale sulla somma diretta invece lo trovate nella II nota sulla dimensione. Potete fare tutti gli esercizi. Consiglio di fare i primi 6 della sezione 12.

## 1. ESERCIZI VARI E RICHIAMI

Questi esercizi riguardano argomenti che nel corso sono stati solo velocemente richiamati durante la prima settimana e che il corso presuppone noti dalle superiori. Si tratta di qualche nozione di calcolo proposizionale, di insiemistica, di trigonometria e coordinate polari e più in generale di qualche esempio di ragionamento matematico.

**Esercizio 1.1.** Avete a disposizione un recipiente che contiene esattamente 36 cc, uno che ne contiene 15, un grande recipiente da 9 lt e una fonte d'acqua. Utilizzando questi recipiente è possibile lasciare nel recipiente grande esattamente

- 21 cc
- 20 cc
- 3 cc

se possibile far vedere come, se impossibile spiegare perché.

**Esercizio 1.2.** Un cavallo si muove su una scacchiera 8x8 partendo da un angolo della scacchiera. Può passare per tutte le caselle della scacchiera una e una sola volta e terminare nell'angolo opposto da quello da cui è partito?

**Esercizio 1.3.** Due bambini giocano con delle monete e due buste. Partono con 100 monete in una busta e 99 in un'altra. Il primo giocatore butta le monete di una busta e divide le monete rimanenti nelle due buste facendo sì che ogni busta contenga almeno una moneta e passa le buste all'altro giocatore. Il gioco continua con i due giocatori che si alternano. Vince chi riesce a dare all'altro due sacchetti con una moneta. Uno dei due giocatori ha una strategia vincente?

**Esercizio 1.4.** Due bambini giocano sul tavolo di casa che è perfettamente rettangolare. Hanno a disposizione una pila di piatti circolari tutti uguali. I due giocatori dispongono, alternandosi, un piatto sul tavolo in una zona libera, ovvero senza che questo sia sovrapposto in nessun modo ai piatti precedenti. Perde il primo giocatore che non riesce a mettere il piatto o il cui piatto cade. All'inizio il tavolo è vuoto. Il primo giocatore ha una strategia vincente. Quale?

**Esercizio 1.5.** Scrivere il numero  $1,2\overline{345}$  come frazione. Scrivere la frazione  $11/7$  come numero con la virgola.

**Esercizio 1.6.** In una classe di Ingegneria meccanica di 250 studenti tutti hanno almeno dato un esame tra analisi, geometria e fisica al primo appello utile. 150 hanno dato analisi, 100 geometria, 75 fisica, 25 sia geometria che analisi e 15 tutti e tre gli esami. Gli studenti che hanno dato sia geometria che fisica hanno dato anche analisi. Quanti sono gli studenti che hanno dato almeno due esami?

**Esercizio 1.7.** Sia

$$A = \{1, 2, 3, 5\} \quad B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 9 \text{ o } x^2 = 16\} \quad \text{e} \quad C = \{4, 6, 7\}$$

Si descrivano gli insiemi

$$A \setminus B \quad C \times (A \setminus B) \quad (A \times B) \cap (C \times B).$$

elencandone gli elementi.

**Esercizio 1.8.** Sia  $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$  e sia  $B = \{x^2 : x \in A\}$ . Si calcoli  $\text{card}(B)$ .

**Esercizio 1.9.** Siano  $A$  e  $B$  due sottoinsiemi dell'insieme  $C$ , ovvero contenuti in  $C$ . Sia

$$D = \{x \in C : \text{ se } x \in A \text{ allora } x \in B\}$$

Capire chi è l'insieme  $D$ . Si faccia un disegno di  $A$ ,  $B$  e  $C$  e si colori l'insieme  $D$ .

**Esercizio 1.10.** Si dia un descrizione più esplicita dei seguenti insiemi

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } x + y + z = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall y \in \mathbb{R}, x + y + z = 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } xz = xzy^2\} \\ &\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall z \in \mathbb{R}, xz = xzy^2\}. \end{aligned}$$

**Esercizio 1.11.** Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari senza usare la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 3\pi/2 \quad \rho = 3, \alpha = 5\pi/4 \quad \rho = 2, \alpha = -\pi/3 \quad \rho = 4, \alpha = -\pi/6$$

**Esercizio 1.12.** Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane senza usare la calcolatrice

$$(-2, -2), \quad (3, -3\sqrt{3}), \quad (-1, 1)$$

**Esercizio 1.13.** Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari usando la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 1, 1 \quad \rho = 3, \alpha = \pi/7 \quad \rho = 2, \alpha = 2 \quad \rho = 4\sqrt{3}, \alpha = -\pi/9$$

**Esercizio 1.14.** Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane usando la calcolatrice

$$(-2, -3), \quad (3, 5), \quad (4, 1)$$

**Esercizio 1.15.** Sia  $S$  una sfera di raggio 1 e sia  $C$  un cono a base circolare e con altezza passante per il centro della base, circoscritto alla sfera. Sapendo che la base del cono ha area uguale a  $4\pi$  calcolare il volume.

**Esercizio 1.16.** Si dimostri che esistono infiniti numeri primi procedendo nel seguente modo: si supponga per assurdo che siano in numero finito e che siano  $p_1, \dots, p_n$  si consideri il numero  $m = p_1 \cdots p_n + 1$  e si osservi che questo numero non è divisibile per nessuno dei numeri primi  $p_1, \dots, p_n$ .

## 2. NUMERI COMPLESSI

**Esercizio 2.1.** Calcolare  $(1 + i)^2$ . Calcolare  $(3 + 4i) \cdot (3 - 2i)$ .

**Esercizio 2.2.** Sia  $z = 3 + 4i$  e  $w = 7 - 3i$ . Calcolare  $\bar{z}/w$  e  $z \cdot \bar{w}$ .

**Esercizio 2.3.** Verificare che per ogni  $z \in \mathbb{C}$  si ha  $\bar{\bar{z}} = z$ .

**Esercizio 2.4.** Calcolare le radici quadrate complesse dei seguenti numeri:

$$37, \quad -169, \quad 9i, \quad -\frac{3}{4} + i, \quad 3 + 7i.$$

(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

**Esercizio 2.5.** Risolvere le seguenti equazioni dove  $z$  è un numero complesso

$$(1 + i)z + 14 = 0, \quad z^2 + 5z + 10 = 0, \quad (1 + i)z^2 + \sqrt{3}z - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = 0$$

(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

**Esercizio 2.6.** Calcolare le radici quarte di  $-16$  (ovvero gli  $z$  tali che  $z^4 = -16$ ). Calcolare le radici ottave di 1 (ovvero gli  $z$  tali che  $z^8 = 1$ ). [utilizzare le coordinate polari].

**Esercizio 2.7.** Determinare tutti i numeri complessi  $z$  tali che  $z^4 = \bar{z}^3$ .

**Esercizio 2.8.** Determinare tutti i numeri complessi  $z$  tali che

$$\frac{z - i}{z + i}$$

è un numero reale.

**Esercizio 2.9.** Determinare tutti i numeri complessi  $z$  tali che

$$\frac{|z - i|}{|z + i|} = 2.$$

**Esercizio 2.10.** Determinare tutti i numeri complessi  $z$  tali che  $e^z = e$ .

**Esercizio 2.11.** Risolvere le seguenti equazioni, dove  $z \in \mathbb{C}$ :

$$(z - \bar{z})^3 = i \quad z^2 + (i - 1)z - i = 0 \quad z^3 = iz\bar{z}$$

**Esercizio 2.12.** Calcolare  $(1 - i)^{24}$ . Risolvere  $z^3 = \arg(z) + \frac{\pi}{6}$  e  $z|z| = 2 \operatorname{Re}(z)$ . [In questo esercizio prendete  $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ .]

**Esercizio 2.13** (Daddi). Si determini il valore del parametro reale  $k$  in modo che l'equazione  $z^2 + (3 + ki)z = 8 - 9i$  abbia, tra le sue soluzioni, il numero complesso  $2 - i$ . Si determini poi l'altra soluzione dell'equazione.

**Esercizio 2.14** (Daddi). Assegnata l'equazione

$$3 \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^{368} z - 18 + \frac{k}{z} = 0$$

dove  $k$  un parametro reale, si determinino gli eventuali valori di  $k$  in modo che le soluzioni siano non reali ed abbiano modulo uguale a  $\sqrt{10}$ .

**Esercizio 2.15** (Daddi). Tra i numeri complessi della forma

$$z = k + 1 + i(2k - 3)$$

dove  $k$  un numero reale, determinare quello avente modulo minimo.

**Esercizio 2.16** (Daddi). Si disegni nel piano complesso l'insieme rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} |\operatorname{Im}(z - 2 + 4i)| \leq 1 \\ |z - 1 + 3i| > 3. \end{cases}$$

**Esercizio 2.17**. Risolvere l'equazione  $e^{3z} + 5e^{2z} + 7e^z = 0$ .

**Esercizio 2.18**. Trovare tutte le  $z, w \in \mathbb{C}$  che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} z\bar{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 2.19** (Daddi). Pierino, dopo vari anni di tentativi poco fruttuosi, si sta finalmente appassionando alla matematica; purtroppo oggi ha perso il foglio sul quale aveva scritto gli appunti della lezione. Appena arrivato a casa, prova a ricostruire un esercizio svolto dal professore; si ricorda che si trattava di determinare le soluzioni di un'equazione della forma  $2z^3 + \dots z^2 + \dots z + \dots = 0$ , dove al posto dei puntini ci sono dei numeri reali. Pierino ricorda anche che, tra le soluzioni dell'equazione, ci sono  $-2$  e  $-1 + 4i$ . Si dica qual l'equazione che il professore ha scritto alla lavagna.

**Esercizio 2.20**. Sia  $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , allora  $w^{n-1} + w^{n-2} + \dots + w + 1 = 0$ .

**Esercizio 2.21**. Sia  $a, b, c$  tre numeri complessi. Dimostrare che  $a, b, c$  sono i vertici di un triangolo equilatero se e solo se

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

**Esercizio 2.22**. Si trovi una formula per l'ennesimo termine della successione  $x_n$  definita nel modo seguente:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}.$$

### 3. GEOMETRIA DEL PIANO E DELLO SPAZIO

**Esercizio 3.1**. Siano dati i punti  $p = (1, 2, 3)$ ,  $q = (0, 1, -2)$ ,  $r = (-2, 1, 1)$ . Calcolare

$$p + 3q - r \quad 3p - 2q + r$$

**Esercizio 3.2**. Siano dati i punti  $p = (1, 2, 3)$ ,  $q = (0, 1, -2)$ ,  $r = (-2, 1, 1)$ ,  $s = (1, 1, 1)$ . Calcolare il baricentro dei quattro punti.

**Esercizio 3.3**. Siano dati i punti  $p = (2, 3)$ ,  $q = (0, 1)$ ,  $r = (-2, 1)$ ,  $s = (1, 1)$ . Calcolare l'intersezione tra le rette  $pq$  e  $rs$ .

**Esercizio 3.4** (Lombardo). Sia dato un quadrilatero convesso  $abcd$  nel piano. Si dimostri che esiste un punto comune ai segmenti congiungenti i punti medi dei lati opposti e al segmento congiungente i punti medi delle due diagonali. Di che punto si tratta?

**Esercizio 3.5**. Siano dati i punti  $p = (1, 2, 3)$ ,  $q = (0, 1, -2)$ ,  $r = (-2, 1, 1)$ . Calcolare lunghezza dei lati, perimetro e angoli del triangolo  $pqr$ . [per gli angoli usare la calcolatrice].

**Esercizio 3.6**. Siano dati i tre punti del piano cartesiano di coordinate  $(2, 3)$ ,  $(7, 1)$ ,  $(5, 4)$ . Calcolare area, perimetro e angoli del triangolo da essi individuato.

**Esercizio 3.7**. Siano dati i punti  $(1, 2, 3)$ ,  $(3, 4, 5)$ ,  $(7, 1, 0)$ . Calcolare area, perimetro e angoli del triangolo da essi individuato.

**Esercizio 3.8.** Sia  $abc$  un triangolo non degenere. Si dimostri che le tre altezze si incontrano in uno stesso punto.

**Esercizio 3.9.** Sia  $abc$  un triangolo non degenere. Sia  $p$  l'intersezione delle altezze (ortocentro),  $q$  l'intersezione delle mediane (baricentro) e  $r$  il centro del triangolo circoscritto (circocentro). Si dimostri che  $p, q, r$  giacciono su una stessa retta.

**Esercizio 3.10.** Da un punto  $P$  esterno ad una circonferenza si tracci una retta che interseca il cerchio e siano  $A$  e  $B$  i due punti di intersezione (eventualmente coincidenti se la retta è tangente alla circonferenza). Si dimostri che

$$\text{dist}(A, P) \text{dist}(B, P) = d^2 - r^2$$

dove  $d$  è la distanza di  $P$  dal centro della circonferenza e  $r$  è il raggio della circonferenza.

**Esercizio 3.11.** Siano dati i punti  $p = (1, 2, 3)$ ,  $q = (0, 1, -2)$ . Calcolare la proiezione di  $q$  sulla retta  $Op$  e la distanza di  $q$  da tale retta.

**Esercizio 3.12.** Siano dati i punti  $p = (1, 2, 3)$ ,  $q = (0, 1, -2)$ ,  $r = (-2, 1, 1)$ . Calcolare la proiezione di  $r$  sulla retta  $pq$  e la distanza di  $r$  da tale retta.

**Esercizio 3.13.** Sia  $\pi$  piano  $x + y + z = 0$ . Si calcoli la proiezione di  $p = (1, 2, 3)$  su  $\pi$  e la distanza di  $p$  da  $\pi$ . Si calcoli inoltre il simmetrico di  $p$  rispetto a  $\pi$ .

**Esercizio 3.14.** Sia  $\pi$  piano  $x + y + z = 1$ . Si calcoli la proiezione di  $p = (1, 2, 3)$  su  $\pi$  e la distanza di  $p$  da  $\pi$ . Si calcoli inoltre il simmetrico di  $p$  rispetto a tale piano.

**Esercizio 3.15.** Calcolare il volume del tetraedro che ha come vertici i punti  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 2, -3)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(3, 1, 1)$ .

**Esercizio 3.16.** Sia  $\Pi$  il piano di equazioni  $ax + by + cz = d$ . Si determini una formula per la distanza di un punto di coordinate  $(\alpha, \beta, \gamma)$  da  $\Pi$ .

#### 4. SPAZI E SOTTOSPAZI VETTORIALI

**Esercizio 4.1.** Si completi la dimostrazione che  $K^n$  è un  $K$  spazio vettoriale.

**Esercizio 4.2.** Si completi la dimostrazione che  $\mathcal{F}(X, K)$  è un  $K$  spazio vettoriale.

**Esercizio 4.3.** Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^2$ . Quali sono sottospazi vettoriali?

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 0\}$$

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 1\}$$

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$$

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + 4y^2 = 0\}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si, No, No, No, Si]

**Esercizio 4.4.** Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale  $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ . Quali sono sottospazi vettoriali?

$$U = \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1) = 0 \text{ e } f(2) = 0\}$$

$$W = \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1)f(2) = 0\}$$

$$X = \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(-x) = f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\}$$

$$Y = \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x+1) = 2f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\}$$

$$Z = \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x+1) = f(x) + 1 \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si, No, Si, Si, No]

**Esercizio 4.5.** Sia  $V, +_V, \cdot_V, 0_V$  il seguente spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ : come insieme  $V = \mathbb{R}^+$ ,  $0_V = 1$  e somma e prodotto sono definite nel modo seguente

$$x +_V y = xy \quad \lambda \cdot_V x = x^\lambda$$

per  $x, y \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Verificare che è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 4.6.** Siano  $U$  e  $W$  due spazi vettoriali e sia  $V = U \times W$ . Su  $V$  definisco  $O$ , somma e prodotto per scalare nel seguente modo:

$$(u, w) + (u', w') = (u + u', w + w') \quad \lambda \cdot (u, w) = (\lambda u, \lambda w) \quad 0 = (0, 0)$$

per ogni  $u, u' \in U$ ,  $w, w' \in W$  e  $\lambda \in K$ . Si verifichi che  $V$  è uno spazio vettoriale.

**Esercizio 4.7.** Si dimostri che se  $U$  e  $W$  sono due sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale  $V$  allora  $U \cap W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

**Esercizio 4.8.** Sia  $\mathcal{R}$  una retta passante per l'origine di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\Pi$  il piano ortogonale a  $\mathcal{R}$  passante per l'origine. Si determini  $\mathcal{R} \cap \Pi$  e  $\mathcal{R} + \Pi$ .

**Esercizio 4.9.** Dimostrare che gli unici sottospazi di  $\mathbb{R}^2$  sono  $\{0\}$  le rette per l'origine e tutto  $\mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 4.10.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$ . Allora  $0 \cdot v = 0_V$  per ogni  $v \in V$  e  $\lambda \cdot 0_V = 0_V$  per ogni  $\lambda \in K$ .

**Esercizio 4.11.** Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi dello spazio vettoriale  $V$ . Si dimostri che se  $U \cup W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  allora  $U \subset W$  o  $W \subset U$ .

## 5. BASI, GENERATORI E VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

**Esercizio 5.1.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  si considerino le seguenti liste di vettori:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 1) & u_2 &= (1, 0, 0) & u_3 &= (0, 1, 0) & u_4 &= (0, 0, 1) \\ v_1 &= (1, 1, 1) & v_2 &= (1, 1, 0) \\ w_1 &= (1, 1, 1) & w_2 &= (1, 1, 0) & w_3 &= (1, -1, 0) \end{aligned}$$

Si dimostri  $u_1, u_2, u_3, u_4$  sono generatori ma non sono linearmente indipendenti, che  $v_1, v_2$  sono linearmente indipendenti ma non sono generatori e che  $w_1, w_2, w_3$  è una base.

**Esercizio 5.2.** Trovare una base del sottospazio  $x - y + 3z = 0$  di  $\mathbb{C}^3$ . Scrivere le coordinate di  $(1, 4, 1)$  rispetto alla base scelta.

**Esercizio 5.3.** Si dimostri che i seguenti polinomi sono una base di  $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$ :  $f_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)$ ,  $f_2(t) = \frac{1}{2}t(t-1)$ ,  $f_3(t) = -t(t-2)$ . Sia  $f = t^2$ , scrivere le coordinate di  $f$  rispetto a  $f_1, f_2, f_3$ . Se  $f$  è un polinomio qualsiasi quali sono le coordinate di  $f$  rispetto alla base  $f_1, f_2, f_3$ . (C'è un modo molto sintetico ed efficace per farlo)

**Esercizio 5.4.** Sia  $X$  un insieme finito e  $K$  un campo e sia  $V = \mathcal{F}_K(X)$  lo spazio vettoriale delle funzioni da  $X$  in  $K$  definito in classe. Per ogni  $x \in X$  sia  $\delta_x$  la funzione definita nel modo seguente:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x; \\ 0 & \text{se } y \neq x. \end{cases}$$

Dimostrare che se  $x_1, \dots, x_n$  sono gli elementi di  $X$  allora  $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$  è una base di  $\mathcal{F}_K(X)$ .

**Esercizio 5.5.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale  $V$  su  $K$ . Siano  $u, v \in V$  e sia  $v$  diverso da zero. Dimostrare che  $u$  e  $v$  sono linearmente dipendenti se e solo se esiste  $\lambda \in K$  tale che  $u = \lambda v$ .

**Esercizio 5.6.** Sia  $v_1, v_2, v_3, v_4$  una base di uno spazio vettoriale  $V$ . Dimostrare che per ogni  $v$  in  $V$  i vettori  $v_1, v_2, v_3, v_4, v$  generano  $V$  ma non sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 5.7.** Sia  $v_1, v_2, v_3, v_4$  una base di uno spazio vettoriale  $V$  e sia  $U = \text{Span}(v_1, v_2)$  e  $W = \text{Span}(v_3, v_4)$ . Determinare  $U \cap W$  e  $U + W$ .

**Esercizio 5.8.** Siano  $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$  e sia  $U = \text{Span}(u_1, \dots, u_h)$  e sia  $W = \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$ . Allora  $U + W$  è generato da  $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$ . [Se aiuta sostituire  $h$  e  $k$  con 2 e 3]

**Esercizio 5.9.** Sia  $U$  e  $W$  due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale  $V$ . Siano  $u_1, u_2 \in U$  e  $w_1, w_2 \in W$ . Dimostrare che se  $U \cap W = \{0\}$  e  $u_1, u_2$  sono linearmente indipendenti e  $w_1, w_2$  sono linearmente indipendenti allora  $u_1, u_2, w_1, w_2$  sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 5.10.** Siano  $v_1, \dots, v_n \in V$  dei vettori linearmente indipendenti. Sia  $v \in V$ . Dimostrare che  $v_1, \dots, v_n, v$  sono linearmente indipendenti se e solo se  $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ .

**Esercizio 5.11.** Si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che sono una base di  $\mathbb{R}^4$  e si calcolino le coordinate dei seguenti vettori rispetto a questa base:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.12.** Siano  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  due rette parallele non coincidenti nel piano e siano  $P$  e  $Q$  due punti distinti in  $\mathcal{R}$ . Sia  $V$  un punto non in  $\mathcal{R}$  e siano  $A$  e  $B$  le intersezioni delle rette  $VP$  e  $VQ$  con  $\mathcal{S}$ . Sia  $C$  l'intersezione delle rette  $PB$  e  $QA$  e sia  $M$  l'intersezione di  $\mathcal{R}$  con  $VC$ . Allora  $M$  è il punto medio di  $PQ$ .

## 6. MATRICI

**Esercizio 6.1.** Descrivere una base dello spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti reali.

**Esercizio 6.2.** Siano date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L_D \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad L_G \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) Calcolare i prodotti  $A \cdot A$ ,  $B \cdot C$ .

(3) Si può eseguire il prodotto  $A \cdot D$ ? E il prodotto  $D \cdot A$ ? calcolare quello dei due che si può eseguire.

(4) Calcolare  $AB - BA$  e  $BC - CB$ .

(5) Calcolare  $D \cdot G$  e  $G^2 + G = G \cdot G + G$ .

(6) Calcolare  $A^{101}$ .

(7) Calcolare  $H \cdot G$  e  $G \cdot H$ .

(8) se  $M$  è una matrice  $m \times 3$  e  $N$  è una matrice  $3 \times n$  descrivere il prodotto  $H \cdot N$  e  $M \cdot H$ .

**Esercizio 6.3.** È vero che se  $A$  e  $B$  sono matrici  $2 \times 2$  e  $A \cdot B = 0$  allora  $A = 0$  o  $B = 0$ . Dimostrare che è vero o esibire un controesempio.

**Esercizio 6.4.** Siano  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tali che  $ad - bc \neq 0$ . Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad e \quad B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che  $A \cdot B = B \cdot A = I_2$ .

**Esercizio 6.5.** (1) Si dimostri che se  $A$  è una matrice  $3 \times 2$  a coefficienti reali e non nulla, allora  $Tr(A \cdot A^t) > 0$ .

(2) Si dimostri che se  $A$  è una matrice  $m \times n$  a coefficienti reali e non nulla allora  $Tr(A \cdot A^t) > 0$ .

**Esercizio 6.6.** Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli  $\text{Tr}(A^{1001})$ .

**Definizione.** Una matrice quadrata  $A$  si dice simmetrica se è simmetrica rispetto alla diagonale ovvero se  $A^t = A$ . Si dice invece antisimmetrica se  $A^t = -A$ . Indichiamo con  $\text{Matsim}_n$  l'insieme delle matrici simmetriche  $n \times n$  e con  $\text{Matant}_n$  quello delle matrici antisimmetriche  $n \times n$ .

**Esercizio 6.7.** Si dimostri che  $\text{Matsim}_n$  è un sottospazio vettoriale di  $\text{Mat}_{n \times n}$ . Se ne determini una base nel caso di  $n = 2$ .

**Esercizio 6.8.** Si dimostri che  $\text{Matant}_n$  è un sottospazio vettoriale di  $\text{Mat}_{n \times n}$ . Se ne determini una base nel caso di  $n = 3$ .

**Esercizio 6.9.** Sia  $K = \mathbb{R}$  o  $K = \mathbb{C}$ .

- (1) Si determini  $\text{Matsim}_n \cap \text{Matant}_n$ .
- (2) Si determini  $\text{Matsim}_2 + \text{Matant}_2$ .
- (3) Si dimostri che  $\text{Matsim}_n + \text{Matant}_n = \text{Mat}_{n \times n}$ .

**Esercizio 6.10.** Sia  $A$  una matrice  $m \times h$  e  $B$  una matrice  $h \times n$ . Si dimostri che

- (1)  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ .
- (2) Se inoltre  $m = n$  vale  $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$ .

**Esercizio 6.11.** Sia data la matrice a coefficienti complessi:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supponiamo che esista una matrice  $2 \times 2$ ,  $B$  tale che  $A \cdot B = I_2$ . Si dimostri che  $ad - bc \neq 0$  e che  $B$  è uguale alla matrice scritta nell'esercizio 6.4

**Esercizio 6.12.** Sia  $A$  una matrice  $m \times m$  invertibile. Dimostrare che  $A^t$  è invertibile e che  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

**Esercizio 6.13.** Siano  $A$  e  $B$  due matrici  $m \times m$  invertibili. Dimostrare che  $AB$  è invertibile e che  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

## 7. APPLICAZIONI LINEARI

**Esercizio 7.1.** Quali delle seguenti applicazioni da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^2$  è una applicazione lineare?

$$\begin{array}{cccc} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z + y \\ 5y \end{pmatrix} & g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z \\ x \end{pmatrix} & h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 1 \end{pmatrix} & k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x - y \end{pmatrix} \\ a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} & b \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - e^y \\ z + x \end{pmatrix} & c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 \end{pmatrix} & d \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix} \end{array}$$

**Esercizio 7.2.** Sia  $V = \mathbb{C}[t]$  e siano  $G : V \rightarrow V$ ,  $G : V \rightarrow \mathbb{C}^3$  e  $H : \mathbb{C}^3 \rightarrow V$  definite nel modo seguente:

$$F(p(t)) = (t^2 - 5t)p(t) \quad G(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(3) \\ p(7) \end{pmatrix} \quad H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(t-1) + y(t-3) + z(t-7) + (t-8)$$

- (1) dire quali tra  $F, G, H$  sono lineari.
- (2) dire quali tra  $F, G, H$  sono iniettive?
- (3) dire quali tra  $F, G, H$  sono surgettive?
- (4) Determinare  $G \circ H$  e  $F \circ H$ .

**Esercizio 7.3.** Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z \\ 2x + y \\ x + z \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

- (1) Si determini una matrice  $A$  tale che  $F = L_A$ ;
- (2) Si dica quali dei seguenti punti sono nel nucleo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (3) Si dica quali dei seguenti punti sono nell'immagine:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 7.4.** Sia  $F : \mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}[t]$  l'applicazione lineare definita da  $F(f) = f'$  la derivata rispetto a  $t$  di  $f$ . Si determini il nucleo e l'immagine.

**Esercizio 7.5.** Sia  $V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$  e sia  $F : V \rightarrow V$  definita da  $F(p(t)) = p'(t) + p(t+1)$ . Si verifichi che è una applicazione lineare e si calcoli la matrice associata a  $F$  rispetto alla base standard di  $V$  in partenza e in arrivo.

**Esercizio 7.6.** Sia  $V = \text{Mat}_{2 \times 3}$  e  $W = \text{Mat}_{2 \times 2}$ . Sia inoltre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Sia  $R_A : V \rightarrow W$  l'applicazione definita da  $R_A(X) = X \cdot A$ . Si dimostri che  $R_A$  è lineare e se ne calcoli la matrice associata rispetto alla basi standard in arrivo e in partenza.

**Esercizio 7.7.** Sia  $W$  il piano di  $\mathbb{R}^3$  definito da  $x + y - 2z = 0$  e sia  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3z \\ x - y \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$$

Si scelga una base di  $W$  e si scriva la matrice associata a  $F$  rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo.

**Esercizio 7.8.** Sia  $F : V \rightarrow W$  una applicazione lineare e siano  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Si dimostri che

- (1) se  $F$  è iniettiva e  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti allora anche  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  sono linearmente indipendenti.
- (2) se  $F$  è surgettiva e  $v_1, \dots, v_n$  sono generatori allora  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  sono generatori.
- (3) se  $F$  è bigettiva e  $v_1, \dots, v_n$  è una base, allora  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  sono una base.

**Esercizio 7.9** (Compito luglio 2017). Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  definito dall'equazione  $2x + z = 0$ , sia  $E$  lo spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  e sia  $T : W \rightarrow E$  l'applicazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x + 2z \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Sia inoltre  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  l'applicazione lineare definita da

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \quad \text{e} \quad S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) scegliere una base di  $W$  e una di  $E$  e scrivere la matrice associata a  $T$  rispetto a queste basi.
- b) scrivere la matrice associata ad  $S$  rispetto alla basi standard di  $\mathbb{R}^3$  ed  $E$ .

**Esercizio 7.10** (Compitino febbraio 2017). Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  definito dall'equazione  $x+y+z=0$  e sia  $V$  il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in 1:  $V = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3} : p(1) = 0\}$ . Sia  $F : W \rightarrow V$  l'applicazione lineare definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2yt + zt^2 + (x+z)t^3$$

(per esempio  $F(1, -1, 0)$  è il polinomio  $1 - 2t + t^3$ )

- Si scelga una base di  $W$  e una di  $V$  e si scriva la matrice associata a  $F$  rispetto a queste basi.
- Sia  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$  l'applicazione lineare tale che

$$G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + t \quad \text{e} \quad G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Scrivere la matrice associata a  $G$  rispetto alle basi standard di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ .

**Esercizio 7.11.** Sia data la seguente matrice  $2 \times 2$ :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- si determini un vettore non nullo  $v_1$  di  $\mathbb{R}^2$  tale che  $L_M(v_1) = 2v_1$ ;
- si determini un vettore non nullo  $v_2$  di  $\mathbb{R}^2$  tale che  $L_M(v_2) = 3v_2$ ;
- si calcoli  $M^{100}$ .

**Esercizio 7.12** (Compito 5 giugno 2017). Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Dire se esistono due basi  $u_1, u_2, u_3$  e  $v_1, v_2, v_3$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $[F]_{v_1, v_2, v_3}^{u_1, u_2, u_3}$  è diagonale.
- Dire se esiste una base  $v_1, v_2, v_3$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $[F]_{v_1, v_2, v_3}^{e_1, e_2, e_3}$  è diagonale.

## 8. SISTEMI LINEARI

**Esercizio 8.1.** Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + x_5 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

- Scrivere la matrice e la matrice completa associate al sistema lineare
- Ridurre la matrice a scalini.
- Calcolare il rango della matrice associata e della matrice completa
- Descrivere le soluzioni del sistema

**Esercizio 8.2.** Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro  $c \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = c^2 + 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = c^2 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

- calcolare il rango della matrice associata al sistema
- calcolare il rango della matrice completa associata al sistema
- per quali  $c$  il sistema ha soluzione? e quando ha soluzione quante soluzioni ha?

**Esercizio 8.3.** Sia  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determini una base di  $N(L_A)$ .

**Esercizio 8.4.** Sia  $A$  una matrice  $m \times n$ . Si dimostri che esiste una matrice  $B$  tale che  $AB = Id$  se e solo se  $\text{rango}(A) = m$  [molto simile al caso delle matrici invertibili fatto in classe]

**Esercizio 8.5.** Si calcoli l'inversa, se esiste, delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 8.6.** Si considerino i seguenti vettori in  $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sia  $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ . Si determini una base di  $W$ , e si calcoli la dimensione di  $W$  e si descriva  $W$  tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in  $W$ :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Per i vettori  $w_i$  che stanno in  $W$  si determinino le coordinate rispetto alla base scelta

**Esercizio 8.7.** Si considerino i seguenti vettori in  $\mathbb{C}^5$ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia  $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ . Si determini una base di  $W$ , e si calcoli la dimensione di  $W$  e si descriva  $W$  tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in  $W$ :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2i+1 \\ -1 \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}$$

**Esercizio 8.8** (Compitino febbraio 2016). Sia  $V$  lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro reale  $k$  si consideri l'applicazione lineare  $L_k : V \rightarrow V$  definita da

$$L_k(p(t)) = p(t+1) - kp(t)$$

per ogni polinomio  $p(t)$ .

- Si scelga una base di  $V$  e si determini la matrice associata ad  $L_k$  rispetto a tale base;
- Si determini il rango di  $L_k$  al variare del parametro  $k$ ;
- Sia  $f(t)$  il polinomio  $f(t) = t^2 + 1$  si determini al variare di  $k$  se esistono polinomi  $p(t)$  tali che  $L_k(p(t)) = f(t)$ .

## 9. TEOREMA FONDAMENTALE, DIMENSIONE

**Esercizio 9.1.** Sia  $u = (1, 2, 3)$  e sia  $U = \mathbb{R}u$ . Sia  $W$  il piano  $3x - z = 0$ . Trovare una base  $v_1, v_2, v_3$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che

- $v_1$  è una base di  $U$ ,
- $v_1, v_2$  è una base di  $W$ .

**Esercizio 9.2.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e sia  $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_n$  una successione di sottospazi di  $V$  tali che  $\dim W_i = i$ . Dimostrare che esiste una base  $v_1, \dots, v_n$  di  $V$  tale che per ogni  $i$ , i vettori  $v_1, \dots, v_i$  sono una base di  $W_i$ .

**Esercizio 9.3.** Siano  $U$  e  $W$  due spazi vettoriali di dimensione finita e sia  $V = U \times W$  lo spazio vettoriale descritto nell'esercizio 4.6. Dimostrare che  $\dim V = \dim U + \dim W$ .

**Esercizio 9.4.** Sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$  e siano  $u_1, \dots, u_n \in V$ . Allora  $u_1, \dots, u_n$  sono una base di  $V$  se e solo se la matrice le cui colonne sono

$$[u_1]_{v_1, \dots, v_n}, \dots, [u_n]_{v_1, \dots, v_n}$$

è invertibile.

**Esercizio 9.5.** Esiste una applicazione lineare da  $\mathbb{R}^5$  a  $\mathbb{R}^2$  iniettiva? e una surgettiva?

**Esercizio 9.6** (Compitino febbraio 2017). a) Si enunci il teorema della dimensione.

b) Esistono due applicazioni lineari

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che la loro composizione  $g \circ f$  sia iniettiva? Motivare la risposta.

**Esercizio 9.7.** Siano  $F: U \longrightarrow V$  e  $G: V \longrightarrow W$  due applicazioni lineari. Si dimostri che  $\text{rango } G \circ F \leq \text{rango } F$  e che  $\text{rango } G \circ F \leq \text{rango } G$ .

## 10. DESCRIZIONE DI SOTTOSPAZI, SOMMA E INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI

**Esercizio 10.1.** Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  descritto dalle equazioni:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0.$$

Descrivere  $W$  in forma parametrica.

**Esercizio 10.2.** Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^5$  generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si descriva  $W$  in forma parametrica e in forma cartesiana.

**Esercizio 10.3.** Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  il sottospazio descritto dalla parametrizzazione  $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$F \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s + t \\ t - s \\ 2t + 3s \end{pmatrix}$$

- (1) si verifichi che  $F$  è una parametrizzazione (cioè che  $F$  è iniettiva);
- (2) si determini una base di  $W$ ;
- (3) si descriva  $W$  in forma cartesiana.

**Esercizio 10.4.** Sia  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si descrivano  $\text{Im } L_A$  e  $N(L_A)$  in forma parametrica e in forma cartesiana.

**Esercizio 10.5** (I compitino 2015-2016). Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^8$ . Sia  $\dim U = 3$  e  $\dim W = 5$ . Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

- A)  $\dim(U + W) = 8$  qualsiasi siano  $U$  e  $W$ .
- B)  $\dim(U \cap W) = 2$  qualsiasi siano  $U$  e  $W$ .
- C) Se  $U \cap W$  è diverso da zero allora  $\dim(U + W) = 8$ .
- D) Se  $\dim(U \cap W) = 3$  allora  $U \subset W$ .
- E) Se  $\dim U + W = 8$  allora  $\dim(U \cap W) = 3$ .

**Esercizio 10.6** (Compito luglio 2017). Sia  $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$  una applicazione lineare con  $\dim N(T) = 1$  e sia  $W$  un sottospazio di  $\mathbb{R}^5$  di dimensione 4

- a) dimostrare che  $W \cap \text{Im}(T) \neq 0$ ;
- b) quali sono le possibili dimensioni di  $W \cap \text{Im}(T) \neq 0$ ? motivare la risposta

**Esercizio 10.7** (Compito 6 giugno 2016). Siano  $V$  e  $W$  due sottospazi di dimensione 3 di  $\mathbb{R}^4$ . Quali sono le possibili dimensioni del sottospazio  $V \cap W$ ? Motiva la risposta in modo completo.

**Esercizio 10.8.** Siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di  $V$ . Si dimostri che se  $U \cup W$  è un sottospazio allora  $U \subset W$  o  $W \subset U$ .

**Esercizio 10.9.** Siano  $U, V, W$  dei sottospazi dello spazio vettoriale  $E$  in somma diretta. Sia  $u_1, \dots, u_a$  una base di  $U$ ,  $v_1, \dots, v_b$  una base di  $V$ ,  $w_1, \dots, w_c$  una base di  $W$ . Dimostrare che  $u_1, \dots, u_a, v_1, \dots, v_b, w_1, \dots, w_c$  è una base di  $U + V + W$ . [La dimostrazione è del tutto analoga a quella fatta in classe nel caso di due soli sottospazi]

**Esercizio 10.10.** Sia  $W = \{x \in \mathbb{C}^5 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$ . Si trovino tre sottospazi  $X$  e  $Y$  e  $Z$  diversi da zero, di  $W$  tali che  $W = X \oplus Y \oplus Z$ .

**Esercizio 10.11.** Sia  $V = \mathbb{R}^4$  e sia  $X, Y, Z$  dei sottospazi di dimensione 3 di  $V$ . Sia  $a = \dim X \cap Y$ ,  $b = \dim X \cap Z$ ,  $c = \dim Y \cap Z$  e  $d = \dim X \cap Y \cap Z$ .

- (1) si dimostri che  $a = 2$  o  $3$ ;
- (2) si dimostri che non può essere  $d = 0$ ;
- (3) di esibiscano  $X, Y, Z$  tali che  $d = 2$ ;
- (4) di esibiscano  $X, Y, Z$  tali che  $d = 1$ ;
- (5) si descrivano tutte le quadruple  $(a, b, c, d)$  che si possono ottenere al variare di  $X, Y, Z$ .

**Esercizio 10.12** (Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018). Sia  $U$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia  $V$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- a) Calcolare la dimensione di  $U$  e  $V$ .
- b) Calcolare la dimensione di  $U + V$  e  $U \cap V$ .

**Esercizio 10.13.** Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^5$ :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^5$  generato da  $u_1, u_2, u_3$  e  $W$  il sottospazio generato da  $w_1, w_2, w_3$ .

- (1) Si descriva una base di  $U + W$ ;
- (2) Si descriva una base di  $U \cap W$ ;
- (3) Si descriva  $U + W$  in forma cartesiana;
- (4) Si descriva  $U \cap W$  in forma cartesiana.

## 11. DETERMINANTI

**Esercizio 11.1.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici, riducendole a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 11.2.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici applicando la formula di Laplace

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 11.3.** Sia  $V = \mathbb{C}[t]_{\leq n-1}$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a  $n-1$  e siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Si consideri la seguente applicazione lineare  $F : V \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$F(p(t)) = (p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n))$$

Si dimostri che è iniettiva se e solo se i numeri  $\lambda_i$  sono distinti. Se ne deduca che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{n-2} & \lambda_i^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se due dei numeri  $\lambda_i$  sono uguali.

**Esercizio 11.4** (I compito 2016). Sia  $B$  la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia  $E = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  lo spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti reali. Sia  $T : E \rightarrow E$  l'applicazione definita da  $T(X) = B \cdot X$ . Si calcoli il determinante di  $T$ .

**Esercizio 11.5.** Sia  $M$  la matrice a blocchi:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

con  $A$  matrice  $p \times p$ ,  $D$  matrice  $q \times q$  e  $B$  matrice  $p \times q$ . Dimostrare che  $\det M = \det A \cdot \det D$  seguendo i seguenti passi:

- (1) Dimostrare che se  $A$  non è invertibile allora non lo è neppure  $M$  e quindi  $\det M = 0$ ;
- (2) Se  $A$  è invertibile dimostrare che

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e applicare il teorema di Binet.

- (3) Calcolare i determinanti delle tre matrici che compaiono nella formula precedente.

## 12. AUTOVALORI, AUTOVETTORI E DIAGONALIZZABILITÀ

**Esercizio 12.1.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso. Sia  $F : V \rightarrow V$  una applicazione lineare tale che  $F^4 = Id$ . Si dimostri che se  $\lambda$  è un autovalore di  $F$  allora  $\lambda^4 = 1$

**Esercizio 12.2.** Sia  $F : V \rightarrow V$  una applicazione lineare e sia  $\sqrt{2}$  un autovalore di  $F$ . Si dimostri che  $6$  è un autovalore di  $F^4 + F^2$ .

**Esercizio 12.3.** Si calcolino gli autovalori delle applicazioni  $L_A$  associate alle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 12.4.** Sia  $F : V \rightarrow V$  una applicazione diagonalizzabile. Si dimostri che  $F^2$  è diagonalizzabile e che  $2F$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 12.5.** Sia  $A$  una matrice  $5 \times 5$  triangolare superiore che ha lungo la diagonale tutte le entrate uguali a  $2$ . Si dimostri che  $A$  è diagonalizzabile se e solo se  $A = 2I$ .

**Esercizio 12.6.** Si calcoli  $A^{100}$  per

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 12.7** (Compito 9 gennaio 2017). Sia  $V$  uno spazio vettoriale sui numeri complessi di dimensione finita e sia  $F : V \rightarrow V$  una applicazione lineare.

- Sia  $\lambda$  un autovalore di  $F$ . Si dia la definizione di molteplicità geometrica e molteplicità algebrica di  $\lambda$  rispetto a  $F$ .
- Supponiamo che  $\dim V = 4$ . Si dimostri che se la molteplicità geometrica di 2 è uguale a 4 allora  $F = 2Id$ .

**Esercizio 12.8.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale e sia  $F : V \rightarrow V$  tale che  $F^2 = F$ . Dimostrare che  $F$  è diagonalizzabile. [Dimostrare che  $V_0 \oplus V_1 = V$  direttamente]

**Esercizio 12.9** (I compitino 2017). Sia  $A$  la matrice  $13 \times 13$  con tutte le entrate uguali a 1.

- Si determini una base del nucleo di  $L_A$ .
- Si determini un autovettore con autovalore diverso da zero (si provi ad indovinare!).
- Si determini una base di autovettori per  $L_A$  e si calcoli il polinomio caratteristico di  $L_A$ .

**Esercizio 12.10.** Sia  $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti complessi. Si consideri l'applicazione lineare  $F : V \rightarrow V$  definita nel seguente modo:

$$F(p(x)) = p(0)x^2 + p'(x)$$

- Si determinino gli autovalori di  $F$ .
- Si determini una base di autovettori.
- Si calcoli  $F^{15}$

**Esercizio 12.11.** Costruisci una matrice  $A$  di taglia  $3 \times 3$  tale che l'applicazione  $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  soddisfi entrambe le proprietà seguenti:

- l'immagine di  $L_A$  è il piano definito da  $x + y = 0$ ;
- l'endomorfismo  $L_A$  non è diagonalizzabile.

**Esercizio 12.12** (II compitino 2016). Determinare per quali valori  $t \in \mathbb{R}$  la matrice seguente è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} t-1 & 2t & t \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2 & t+2 & 1 \end{pmatrix}.$$