Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 25 gennaio 2021

Istruzioni: Avete 1 ora a disposizione. Risolvete questi esercizi su uno o più fogli. Alla fine, fate le foto dei fogli che avete scritto e mandatele a maffei@dm.unipi.it Nei fogli che mandate ci deve essere tutto il procedimento: non basta scrivere il risultato, dovete motivare la risposta. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi all'orale è necessario aver svolto correttamente almeno 3 esercizi.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ e $W = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$. Sia $F : V \longrightarrow W$ l'applicazione lineare definita da

$$F(f(t)) = (t+1)f(t) + t^2 f(0)$$

per $f(t) \in V$. Si scriva la matrice associata a F rispetto alla base $t+1, t^2+1, t^2+t$ in partenza e standard in arrivo.

Esercizio 2. Si determini la forma di Jordan della matrice A al variare del parametro k

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $x_1 + x_2 = 0$. Sia g_B il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determini una base dell'ortogonale dello spazio W rispetto al prodotto scalare g_B.

Esercizio 4. Sia W il sottospazio di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ generato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

e U il sottospazio di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici A con $TrA = 0$ Si determini una base dell'intersezione di U e W.

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^3$ si consideri la retta r passante per i punti $(1,1,1)$ e $(0,1,0)$ e il piano π di equazione $x + y - z = 3$. Si costruisca un'isometria $F(x) = Ax + b$ tale che $F(r) \subset \pi$.

1. Soluzioni prima parte del compito del 17 febbraio 2020

Domanda 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Domanda 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ per $a \neq 2$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ per $a = 2$.

Domanda 3.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Domanda 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Domanda 5.

$$F(v) = v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$