COMPITI DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DELL'ANNO 2019

Le soluzioni dei compiti sono in fondo al file

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 7 gennaio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Per le prime 5 domande scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per la sesta potete usare anche il retro del foglio. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte alle prime 5 domande. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 4 delle prime 5 domande e alla domanda 6. Per essere ammessi all'orale è necessario inoltre rispondere correttamente alla sesta domanda.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Per quali valori di t la seguente matrice è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix}$$

E' diagonalizzabile per t

Domanda 2. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si determini il determinante di A^3.

Risposta: $\det(A^3) =$

Domanda 3. Sia $z = 3 + i$ e $w = 4 - i$. Si determini la parte reale di z/w

Risposta: $Re(z/w)=$

Domanda 4. Sia P il punto di $\mathbb{R}^3$ di coordinate $(1, 2, 3)$ e sia W il piano passante per l'origine ortogonale a $(-1, 1, 0)$. Si determini la proiezione Q di P su W.

Risposta: $Q =$

Domanda 5. Sia $F : \mathrm{Mat}_{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ una applicazione lineare surgettiva. Si determini la dimensione del nucleo di F.

Risposta: $\dim N(F) =$

Domanda 6. Cosa è un prodotto scalare su uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V? Si dia la definizione.

Compito di Geometria e algebra lineare del 7 gennaio 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 15 di tempo.

Esercizio 1. Sia g un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$. Dimostrare che se $g(v,v)=0$ per ogni $v\in V$ allora $g(v,w)=0$ per ogni $v,w\in V$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\\1\end{pmatrix}\qquad u_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\2\end{pmatrix}\qquad w_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}\qquad w_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad w_3=\begin{pmatrix}3\\3\\1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Sia U lo spazio vettoriale generato da u_1,u_2,u_3 e W lo spazio vettoriale generato da w_1,w_2,w_3. Si determini la dimensione di $U+W$ e quella di $U\cap W$.

Esercizio 3. Siano ℓ una retta e W un piano di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine con $\ell\subset W$. Sia R_θ una rotazione attorno alla retta ℓ di angolo θ e sia $P:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul piano W. Per quali valori dell'angolo θ l'applicazione $F=P\circ R_\theta$ è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Sia data la matrice

$$M=\begin{pmatrix}3&0&4\\0&1&0\\4&0&-3\end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice ortogonale G tale che $G^t\,M\,G$ sia diagonale. [Ricordiamo che una matrice ortognale è una matrice tale che $G\,G^t=I$]

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 28 gennaio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Per le prime 5 domande scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per la sesta potete usare anche il retro del foglio. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte alle prime 5 domande. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 4 delle prime 5. Per essere ammessi all'orale è necessario inoltre rispondere correttamente alla sesta domanda.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $z=3+i$ e $w=4+2i$. Si determini $\|z-w\|$.

Risposta: $\|z-w\|=$

Domanda 2. Si dica per quali valori di t la seguente matrice è diagonalizzabile

$$A=\begin{pmatrix}1&t&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&t+1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

Risposta: $t=$

Domanda 3. Si calcoli il determinante della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risposta: $\det A =$

Domanda 4. Sia $P = (1, 2, 3)$ e sia W il piano di equazione $x + z = 0$ di $\mathbb{R}^3$. Si determini il punto Q simmetrico di P rispetto al piano W.

Risposta: $Q =$

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione con $\dim N(F) = 1$. Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ tale che $U + \operatorname{Im} F = \mathbb{R}^5$ e $U \cap \operatorname{Im} F = 0$. Si determini la dimensione di U.

Risposta: $\dim U =$

Domanda 6. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare. Dare la definizione di autovalore di F.

Compito di Geometria e algebra lineare del 28 gennaio 2019: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 15 di tempo.

Esercizio 1. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare. Siano u, v, w tre autovettori relativi agli autovalori $0, 1, 2$. Si dimostri che sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -10 \\ -5 & 10 & -10 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcolare $Tr(A^{1001})$.

Esercizio 3. Consideriamo i seguenti punti di $\mathbb{R}^2$

$$A = (0, 0) \quad B = (0, 5) \quad C = (1, 3) \quad D = (2, 2) \quad E = (6, -1) \quad F = (5, 1).$$

Determinare una isometria di $\mathbb{R}^2$ che porta il triangolo DEF nel triangolo ABC. Descrivere tale isometria nella forma $f(x) = Lx + b$ calcolando esplicitamente L e b.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ e sia $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da

$$g(f(t), g(t)) = f(-1)g(-1) - f(0)g(0) + f(1)g(1) - f(2)g(2)$$

a) Si determini la segnatura di g.
b) Determinare un sottospazio di V che sia uguale al suo ortogonale.

Compito di Geometria e algebra lineare di mercoledì 13 febbraio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Per le prime 5 domande scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per la sesta potete usare anche il retro del foglio. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte alle prime 5 domande. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 4 delle prime 5 domande. Per essere ammessi all'orale è necessario inoltre rispondere correttamente alla sesta domanda.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 = -8 - 6i$.

Risposta: le soluzioni sono

Domanda 2. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F(f(t)) = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}.$$

Si scriva la matrice A associata ad F rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ e $\mathbb{R}^3$.

Risposta: $A =$

Domanda 3. Si calcoli la segnatura del prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ associato alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Risposta: $(i_+, i_-, i_0) =$

Domanda 4. Sia R la rotazione di $\mathbb{R}^2$ attorno all'origine di angolo $\pi/6$ radianti in senso antiorario e sia $P = (1, 1)$. Si calcoli $R(P)$.

Risposta: $R(P) =$

Domanda 5. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 4 e sia $U + W = \mathbb{R}^5$. Si determini $\dim U \cap W$.

Risposta: $\dim U \cap W =$

Domanda 6. Siano U e W due sottospazi di V. Cosa vuol dire che V è la somma diretta di U e W? Dare la definizione.

Compito di Geometria e algebra lineare di mercoledì 13 febbraio 2019: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 15 di tempo.

Esercizio 1. Siano U e W due sottospazi di V. Si dimostri che se $U \cup W$ è un sottospazio allora $U \subset W$ o $W \subset U$.

Esercizio 2. Si descriva una applicazione lineare $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ con le seguenti proprietà.

- L'immagine di F è il sottospazio generato da $e_1 + e_2$ ed e_3;
- F è non diagonalizzabile;
- la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è uguale a 1.

Si determini inoltre la matrice associata ad F rispetto alla base standard in partenza ed in arrivo.

Esercizio 3. Sia W il piano di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $z = 0$ e sia ℓ una retta di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine. Sia R la rotazione attorno alla retta ℓ di angolo $\theta \neq 0$ e sia $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul piano W. Sia $F = P \circ R$ la loro composizione.

a) Si verifichi che se F è autoaggiunta allora e_3 è un autovettore di R.
b) Per quali rette ℓ e per quali valori dell'angolo θ l'applicazione F è autoaggiunta?

Esercizio 4. Sia b il prodotto scalare di $V = \mathbb{R}^4$ che ha come matrice associata rispetto alla base standard, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia W il sottospazio di V definito dall'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Si determini la segnatura di b ristretto a W.

Compitino di algebra lineare di martedì 12 febbraio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati e le lettere AAB. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 4 delle prime 5 domande e alla domanda 6.

Nome e cognome e matricola: ____

Domanda 1. Sia $u = (1, 0, 2)$ e $v = (2, 1, 1)$ e sia θ l'angolo $u0v$, ovvero l'angolo compreso tra le due semirette che partono dall'origine e hanno direzione u e v rispettivamente. Calcolare $\cos\theta$.

Risposta: $\cos\theta =$

Domanda 2. Calcolare le soluzioni dell'equazione $z^2 = 3 + 4i$.

Risposta: Le soluzioni sono

Domanda 3. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det(A^3)$.

Risposta: $Det(A^3) =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare surgettiva e sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 2. Sapendo che $\dim N(F) \cap U = 1$ determinare $\dim N(F) + U$.

Risposta: $\dim N(F) + U=$

Domanda 5. $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare. Sia v_1, v_2 una base di $\mathbb{R}^2$ diversa dalla base standard. Se

$$[F]^{v_1,v_2}_{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Quali delle seguenti frasi sono sempre vere (ovvero vere comunque si sia scelta la base v_1, v_2):

A: $F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

B: $F(v_1 + v_2) = e_1 + 3e_2$

C: $F(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

D: $\dim N(F) = 0$

Nota bene: le frasi vere potrebbero essere anche più d'una.

Risposta: le frasi vere sono

Domanda 6. Sia V un K-spazio vettoriale e siano u, v, w degli elementi di V. Cosa è il sottospazio vettoriale generato da u, v, w? Dare la definizione.

Compitino di algebra lineare di martedì 12 febbraio 2019: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 15 di tempo.

Esercizio 1. Siano u, v, w tre elementi di uno spazio vettoriale V e sia E un sottospazio vettoriale di V. Dimostrare che se $u, v, w \in E$ allora $Span(u, v, w) \subset E$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{C}^3$, sia U il sottospazio definito dall'equazione $x + y = 0$ e W il sottospazio definito dall'equazione $y + z = 0$. Sia $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ una applicazione lineare tale che

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x + 2y + 2z \\ -x + 2y + 2z & y \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U$$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & -z \\ -z & -x \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$$

Scrivere la matrice associata ad F rispetto alle basi standard di $\mathbb{C}^3$ e $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Sia U il sottospazio vettoriale di V dei polinomi $p(t)$ tali che $p(1) = p(2) = 0$. Sia W il sottospazio vettoriale di V generato da $t + 1, t^2 + 1, t^3 + 1, t^4 + 1$. Si calcoli la dimensione di $U \cap W$ e se ne dia una parametrizzazione.

Esercizio 4. Sia X il piano di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $z = 0$. Sia $u = (0, \cos\theta, \sin\theta)$ e sia Y il piano ortogonale a u passante per l'origine. Siano $P_X : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione su X e $P_Y : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione su Y. Sia

$$F = \frac{P_X + P_Y}{2}.$$

Studiare la diagonalizzabilità di F al variare dell'angolo θ.

Compitino di algebra lineare del 31 maggio 2019

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri oggetti elettronici, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcola la forma di Jordan di A.

(2) Sia B una matrice complessa 4×4 tale che:

$$\operatorname{rank}(B - 3I) = 2, \quad \operatorname{rank}(B + I) = 3.$$

È vero che B deve essere simile ad A? Motiva la risposta (se è vero dimostralo, altrimenti fornisci un controesempio).

(3) Sia B una matrice complessa 4×4 tale che:

$$\det B = 9, \quad \operatorname{rank}(B - 3I) = 2, \quad \operatorname{rank}(B + I) = 3.$$

È vero che B deve essere simile ad A? Motiva la risposta (se è vero dimostralo, altrimenti fornisci un controesempio).

Esercizio 2.

(1) Scrivi la definizione di segnatura (di un prodotto scalare g su uno spazio vettoriale V reale di dimensione n).

(2) Considera la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determina la segnatura del prodotto scalare $g_S(x, y) = {}^t xSy$ su $\mathbb{R}^3$.

(3) Determina un piano $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che $W^\perp \subset W$ con il prodotto scalare g_S.

Esercizio 3. Considera le rette affini

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Scrivi una rototraslazione $f(x) = Ax + b$ tale che $f(s) = r$. Se puoi, descrivila prima geometricamente e poi calcola A e b.

Esercizio 4. Sia S una matrice simmetrica $n \times n$ tale che $S^2 = I$. Mostra che l'endomorfismo $L_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una riflessione ortogonale rispetto ad un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$. Come si calcola V a partire da S?

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 3 giugno 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 40 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 5 domande.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Considera la base $\mathcal{B}$ formata da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

del piano $4x + 3y - 5z = 0$. Scrivi le coordinate di $(-4, 7, 1)$ rispetto a questa base.

Risposta: Le coordinate sono

Domanda 2. Considera la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determina per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.

Risposta: La matrice è diagonalizzabile per t

Domanda 3. Sia $z = 2 + 3i$ e $w = 1 - i$. Determina la parte immaginaria di z/w

Risposta: $Re(z/w) =$

Domanda 4. Sia A una matrice quadrata $n \times n$ tale che $A^3 = I$. Determina il rango di A.

Risposta: Il rango di A è

Domanda 5. Sia $f(x) = Ax + b$ la rotazione in $\mathbb{R}^2$ antioraria di angolo $\frac{\pi}{2}$ intorno al punto $(1, 0)$. Determina A e b.

Risposta: $A =$	$b =$

Domanda 6. Sia $W \subset \mathbb{C}^6$ un sottospazio di dimensione 5 e $f\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^6$ una applicazione lineare non nulla tale che $\text{Im}(f) \cap W = \{0\}$. Che dimensione ha il nucleo di f?

Risposta: La dimensione è

Compito di Geometria e algebra lineare del 3 giugno 2019: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 30'.

Esercizio 1. Sia $f\colon V \to W$ una applicazione lineare.

(1) Definisci il nucleo $N(f)$ di f e mostra che è un sottospazio vettoriale di V.
(2) Definisci l'immagine di f e mostra che è un sottospazio vettoriale di W.

Esercizio 2. Considera la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale formato dalle matrici reali 2×2. Considera l'endomorfismo $f\colon M(2) \to M(2)$ definito da

$$f(X) = A^t X.$$

(1) Determina se f sia diagonalizzabile e in caso affermativo esibisci una base di autovettori.
(2) Calcola $f^4(X)$ per

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il simbolo f^4 indica come di consueto la composizione $f \circ f \circ f \circ f$.

Esercizio 3. Considera in $\mathbb{R}^3$ il piano affine $\pi = \{z = 1\}$ e la retta affine

$$r = \begin{cases} x - z & = -2 \\ \quad y & = 1 \end{cases}$$

Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ senza punti fissi tale che $r \subset f(\pi)$.

Esercizio 4. Considera la famiglia di coniche dipendenti da un parametro

$$C_k = \{x^2 + 2kxy + y^2 + 2kx + 2ky + 2k - 2 = 0\}.$$

(1) Determina il tipo di conica per ogni k.
(2) Determina i centri di simmetria per C_k per ogni k.
(3) Per tutti i k per cui C_k è una ellisse, determina il rapporto fra l'asse maggiore e quello minore al variare di k.
(4) Per tutti i k per cui C_k è una iperbole, determina gli asintoti.

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 24 giugno 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 45 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 5 domande.

Domanda 1. Considera $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0\}$. Sia $f\colon \mathbb{R}^7 \to W$ una applicazione lineare surgettiva. Qual è la dimensione di $\ker f$?

Risposta: $\ker f$ ha dimensione

Domanda 2. Considera i sottospazi $U, W \subset \mathbb{R}^3$ ed il vettore $v \in \mathbb{R}^3$ seguenti:

$$U = \{7x - 5y + 4z = 0\}, \quad W = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, il vettore v si scrive in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Determina u.

Risposta: $u =$

Domanda 3. Scrivi una base di autovettori per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Risposta:

Domanda 4. Sia A una matrice quadrata 2×2 non nulla tale che A^2 sia la matrice nulla. Determina il rango di A.

Risposta: Il rango di A è

Domanda 5. Sia $f(x) = Ax + b$ la riflessione in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla retta $x + y = 1$. Determina A e b.

Risposta: $A =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $b =$

Domanda 6. Determina la distanza fra le rette r e s seguenti:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -t \\ 1+t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad s = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ 1 \\ 2+2s \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Risposta: La distanza è

Compito di Geometria e algebra lineare del 24 giugno 2019

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 30'.

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una isometria vettoriale (rispetto al prodotto scalare euclideo). Dimostra che f è una rotazione o una antirotazione.

Esercizio 2. Considera $\mathbb{R}^4$ con variabili w, x, y, z. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio

$$U = \{w - x + y = 0, \quad x - z = 0\}.$$

(1) Costruisci un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.
(2) Costruisci una matrice reale A di taglia 4×4 tale che l'endomorfismo $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ soddisfi queste proprietà:
  (a) U è L_A-invariante,
  (b) A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e neppure su $\mathbb{C}$,
  (c) L_A è suriettivo.

Esercizio 3. Considera in $\mathbb{R}^3$ i piani affini

$$\pi = \{z = 1\}, \quad \pi' = \{x = y\}$$

Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ senza punti fissi tale che $f(\pi) = \pi'$ e $f(\pi') = \pi$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ lo spazio formato dai polinomi di grado al massimo 2. Considera il prodotto scalare g su V dato da

$$g(p, q) = p(0)q(0) + p'(1)q'(1) - p(-1)q(-1).$$

(1) Calcola la segnatura di g.
(2) Determina due polinomi $p(x)$, $q(x)$ indipendenti tali che la restrizione di g al piano generato da p e q sia degenere.

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 15 luglio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito.

Domanda 1. Sia $z = 1 + i$. Calcolare il modulo, r, e l'argomento, θ, di z.

Risposta $r =$ $\theta =$

Domanda 2. Sia Π il piano definito dall'equazione $x + y - 2z = 0$ e sia P il punto $(1, 2, 3)$. Calcolare la proiezione di P su Π.

Risposta: La proiezione di P su π è uguale a

Domanda 3. Per quali valori di ε la seguente matrice è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 1-\varepsilon \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Risposta: La matrice è diagonalizzabile per ε

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ e sia $\ker F = \{x \in \mathbb{R}^8 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ e } x_3 + x_5 + x_7 = 0\}$. Calcolare il rango di F.

Rango F=

Domanda 5. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo e sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se T è una isometria allora T è diagonalizzabile;
B) se $g(Tv, u) = g(v, Tu)$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}^3$ allora T è una isometria;
C) se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ allora $\dim U + \dim U^\perp = 3$;
D) se T è autoaggiunta e λ è un autovalore di T allora $\lambda = \pm 1$;
E) se T è una isometria e $det(T) = 1$ allora 1 è un autovalore di T.

Le risposte vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano X, Y, Z tre suoi sottospazi la cui somma è V, ovvero $V = X + Y + Z$. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se V è la somma diretta di X, Y e Z, e se $0 = x + y + z$ con $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$ allora $x = y = z = 0$;
B) se $X \cap Y = Y \cap Z = 0$ allora V è la somma diretta di X, Y e Z;
C) se V è la somma diretta di X, Y, Z allora $X \cap Z = 0$;
D) se $V = \mathbb{R}^2$, $X = \mathrm{Span}(e_1)$, $Y = \mathrm{Span}(e_2)$, $Z = \mathrm{Span}(e_1 + e_2)$, allora V è la somma diretta di X, Y e Z;
E) se $\dim X = \dim Y = \dim Z = 2$ allora $\dim V \leqslant 6$.

Le risposte vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Compito di Geometria e algebra lineare del 15 luglio 2019

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 30'.

Esercizio 1.

(1) Sia g un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Definisci cosa vuol dire che g è definito positivo.
(2) Se S è una matrice simmetrica reale $n \times n$, diciamo come sempre che S è *definita positiva* se $g_S(x, y) =^t xSy$ è un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$. Mostra che se S e S' sono due matrici $n \times n$ definite positive allora anche $S + S'$ è una matrice definita positiva.

Esercizio 2. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Determina la forma di Jordan di A.
(2) Determina la forma di Jordan di A^3.

Esercizio 3. Considera le rette in $\mathbb{R}^3$

$$r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Scrivi in forma parametrica la retta s che è ortogonale ad entrambe r_1 e r_2.
(2) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r_1) = r_2$.
(3) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r_1) = r_2$ e $f(r_2) = r_1$.

Esercizio 4. Considera la conica dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$C_t = \{x^2 + (1-t)y^2 + 2tx - 2(1-t)y + 2 - t = 0\}.$$

(1) Determina il tipo di conica per ogni $t \in \mathbb{R}$.
(2) Determina i centri della conica per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Compito di Geometria e algebra lineare di giovedì 12 settembre 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 30 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome o matricola sui sopra. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito.

Domanda 1. Scrivere in forma cartesiana il numero complesso $z = e^{1+i\frac{\pi}{4}}$.

Risposta: $z =$

Domanda 2. Sia A una matrice 3×3 non diagonalizzabile con polinomio caratteristico $2t^2 - t^3$. Scrivere la sua forma di Jordan.

Risposta: $A =$

Domanda 3. Sia g il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^3$ e $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ una applicazione lineare. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se T è autoaggiunto allora T ha determinante uguale a ± 1;
B) se T è autoaggiunto allora gli unici autovalori possibili della matrice associata a T sono 1 e -1;
C) se T è autoaggiunto allora esiste una base ortonormale di autovettori di T;
D) se $T = (1 + 2i)Id$ allora T è autoaggiunto;
E) se T è autoaggiunto allora $g(Te_1, e_2) = g(e_1, Te_2)$.

Le implicazioni vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^7 \longrightarrow V$ una applicazione lineare iniettiva. Sia $W = \text{Span}\{e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_4\}$ e sia $\ker F \oplus W = \mathbb{R}^7$. Calcolare il rango di F.

Risposta: Il rango di F è

Domanda 5. Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione linerare tra due spazi vettoriali di dimensione finita; Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se $\dim V = 2$ allora $\dim \operatorname{Im} F \leqslant 2$;
B) se $V = W$ allora F è diagonalizzabile;
C) se $u \in \ker F$ e allora $u \in W$;
D) se $u, v \in V$ sono linearmente dipendenti allora $F(u), F(v)$ sono linearmente dipendenti;
E) se $\dim V = 6$ e $\dim W = 5$ allora F non è iniettiva.

Le frasi vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $u, v, w \in V$. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se u, v e w sono linearmente indipendenti allora $\dim V \geqslant 3$;
B) se u, v e w sono linearmente indipendenti e $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ allora $\alpha = \beta = \gamma = 0$;
C) se u, v e w sono linearmente indipendenti allora u e v sono linearmente indipendenti;
D) se $u = v = w = 0$ allora u, v, w sono linearmente indipendenti;
E) se $w = 2u + 2v$ allora u, v, w non sono lineramente indipendenti.

Le implicazioni vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Compito di Geometria e algebra lineare di giovedì 12 settembre 2019

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 30'.

Esercizio 1.

a) Dare la definizione di endomorfismo autoaggiunto ed enunciare il teorema spettrale;
b) Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard e supponiamo che gli autovalori di T siano $1, 2, 3$. Sia $v \in \mathbb{R}^3$ e sia $\|v\| = 1$. Dimostrare che $\|T(v)\| \leqslant 3$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Sia

$$U = \mathrm{Span}\{t^2 - 2t, t^2 - t - 1, (t-1)^3\}$$

e sia

$$W = \{f \in V : f(0) = f(1) = f(2) = 0\}$$

Calcolare le dimensioni di $U \cap W$ e $U + W$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice dipendente da un parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & k-2 \\ k+1 & 1 & 2k-1 \\ 0 & k & -k \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori $k \in \mathbb{R}$ la matrice ha autovalore $\lambda = 2$. Per i valori k trovati, determinare se A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Considerare le rette

$$r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(1) Determinare la retta s ortogonale a r_1 e r_2. Si scriva s in forma parametrica e si individuino i punti $s \cap r_1$ e $s \cap r_2$.
(2) Determinare il piano π parallelo ad entrambe le rette r_1 e r_2 ed equidistante da queste. Si scriva π in forma cartesiana.
(3) Determinare una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r_1) \cap r_2 \neq \emptyset$ e $f(r_2) \cap r_1 \neq \emptyset$.

1. Soluzione compito del 7 gennaio: prima parte

Risposta alla domanda 1: t diverso da $0, 1$.

Risposta alla domanda 2: 27

Risposta alla domanda 3: 11/17

Risposta alla domanda 4: $(3/2, 3/2, 3)$

Risposta alla domanda 5: 5

Risposta alla domanda 6: Una funzione $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice un prodotto scalare se valgono le seguenti proprietà

- $g(v, w) = g(w, v)$ per ogni $v, w \in V$;
- $g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w)$ per ogni $u, v, w \in V$;
- $g(u, \lambda v) = \lambda g(u, v)$ per ogni $u, v \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Punteggi: ammessi alla seconda parte senza errori 5 punti, con un errore 2 punti
Punteggi della seconda parte: 3,8,8,8

2. Soluzione compito del 7 gennaio: seconda parte

Soluzione esercizio 1. Siano $v, w \in V$ allora

$$g(v, w) = \frac{g(v + w, v + w) - g(v, v) - g(w, w)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Soluzione esercizio 2. Calcoliamo intanto la dimensione di U. Per fare questo calcoliamo il rango della matrice le cui colonne sono i generatori di U. Similmente facciamo con W. Riducendo a scalini otteniamo le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim U = 2$ e $\dim W = 3$, osserviamo inoltre che u_1, u_2 sono una base di U. Per calcolare la dimensione di $U + W$ osserviamo che u_1, u_2, w_1, w_2, w_3 sono dei generatori di $U + W$. Procediamo quindi come abbiamo fatto per U e W e calcoliamo il rango della matrice le cui colonne sono questi cinque vettori (si potevano prendere anche tutti e 6 e si sarebbe ottenuta una matrice un po' più grande).Riducendo a scalini si può ottenere la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\dim U + W = 4$. Applicando la formula di Grassmann otteniamo infine che $\dim U \cap W = 1$.

Soluzione esercizio 3. Sia v_1, v_2, v_3 una base ortnormale di $\mathbb{R}^3$ tale che v_1 è una base di ℓ e v_1, v_2 è una base di W. La matrice associata a F rispetto a questa base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico uguale a $-t(t - 1)(t - \cos\theta)$.

Se $\cos\theta \neq, 0, 1$, allora F ha tre autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile.

Se $\cos\theta = 1$ allora $\sin\theta = 0$ e v_1, v_2, v_3 sono una base di autovettori.

Se $\cos\theta = 0$ allora l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2. In questo caso $\sin\theta \neq 0$, quindi F ha rango 2 la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 in particolare è uguale a 1 e F non è diagonalizzabile.

Quindi F è diagonalizzabile se e solo se $\theta \neq \pm\pi/2$ come angolo.

Soluzione esercizio 4. Essendo la matrice simmetrica sappiamo che esiste una base ortonormale di autovettori. Determiniamo una tale base. Calcoliamo intanto gli autovalori della matrice M. Il polinomio caratteristico è uguale a

$$p_M(t) = (t-1)(t^2-25).$$

Quindi gli autovalori sono $1, 5$ e -5. Calcoliamo degli autovettori relativi a questi autovalori. Osserviamo che $Me_2 = e_2$ quindi e_2 è un autovettore relativo all'autovettore 1. Per calcolare gli autovettori relativi agli autovalori 5 e -5 studiamo i sistemi

$$M \cdot v = 5\, v \qquad M \cdot v = -5\, v.$$

Otteniamo che $v_2 = (2, 0, 1)$ è un autovettore relativo all'autovalore 5 e che $v_3 = (1, 0, -2)$ è un autovettore relativo all'autovalore -5. Quindi $v_1 = e_2$, v_2, v_3 sono una base di autovettori. Sono ortgonali ma non sono tuttavia ortonormali. Normalizzando le lunghezze ad 1 otteniamo

$$u_1 = e_2 \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1) \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)$$

sono una base ortonormale di autovettori. Quindi la matrice

$$G = [I]_e^u \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

é una matrice ortgonale e $G^t M G = G^{-1} M G = [L_M]_u^u$ è diagonale con $1, 5, -5$ lungo la diagonale.

Soluzioni del compito del 28 gennaio: prima parte

Risposta alla domanda 1: $\sqrt{2}$**.**

Risposta alla domanda 2: $t = -1$**.**

Risposta alla domanda 3: 1**.**

Risposta alla domanda 4: $(-3, 2, -1)$**.**

Risposta alla domanda 5: 2**.**

Risposta alla domanda 6: λ è un autovalore di F se esiste un vettore $v \neq 0$ in V tale che $F(v) = \lambda v$.

Punteggi: ammessi alla seconda parte senza errori 5 punti, con un errore 2 punti. Abbiamo ammesso anche chi si è dimenticato di scrivere che v deve essere diverso da zero nella risposta alla domanda 6 rispettivamente con 3 e 0 punti.

Punteggi della seconda parte: 3,8,8,8

Soluzioni del compito del 28 gennaio: seconda parte

Soluzione esercizio 1. Supponiamo che $au + bv + cw = 0$. Applicando F e poi F^2 otteniamo

$$\begin{aligned} au + bv + cw &= 0 \\ bv + 2cw &= 0 \\ bv + 4cw &= 0 \end{aligned}$$

Sottraendo alla terza equazione la seconda otteniamo $cw = 0$ e quindi $c = 0$ perché, essendo un autovettore, $w \neq 0$. Sostituendo $c = 0$ nella seconda equazione otteniamo similmente che $b = 0$ e infine dall'equazione iniziale otteniamo $a = 0$.

Soluzione esercizio 2. Il polinomio caratteristico di A è uguale a

$$-t(t^2 - 25).$$

Quindi gli autovalori di L_A sono $0, 5, -5$ ed esiste una base v_1, v_2, v_3 tale che

$$[L_A]_v^v = B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice associata ad L_A^{1001} rispetto a questa base è uguale a

$$B^{1001} = \begin{pmatrix} (-5)^{1001} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{1001} \end{pmatrix}.$$

Infine osserviamo che la traccia di L_A^{1001} la possiamo calcolare in qualsiasi base quindi $Tr L_A^{1001} = Tr A^{1001} = Tr B^{1001} = 0$.

Soluzione esercizio 3. Osserviamo che i lati AB e DE sono lunghi 5, che AC e DF sono lunghi $\sqrt{10}$ e che BC e EF sono lunghi $\sqrt{5}$. Quindi una isometria che porta DEF in ABC, porta D in A, E in B e F in C.

Come primo passo trasliamo il triangolo DEF portando D nell'origine. Determiniamo in questo modo un triangolo $D'E'F'$ con i seguenti vertici

$$D' = (0, 0) \quad E' = (4, -3) \quad F' = (3, -1).$$

Ora effettuiamo una isometria lineare (che quindi lascia fisso $D' = A$) e che porta E' in B. Per esempio possiamo prendere la riflessione di direzione

$$u = B - E' = (-4, 8)$$

. La riflessione R associata ha come matrice associata rispetto alla base standard la matrice

$$L = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $R(E') = B$ e $R(F') = C$. L'isometria cercata è quindi $f(x) = R(x - D)$. Esplicitamente

$$f(x) = L \cdot x - L \cdot D = L \cdot x - \begin{pmatrix} 14/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 4. Come per altri problemi simili è utile utilizzare una base f_{-1}, f_0, f_1, f_2 di V, con

$$f_i(i) = 1 \qquad f_i(j) = 0 \quad \text{ se } j \in \{-1, 0, 1, 2\} \text{ e } j \neq i.$$

L'esistenza di una tale base l'abbiamo vista in molti modi diversi in altri esempi, esplicitamente abbiamo

$f_{-1}(t) = -\frac{1}{6}t(t-1)(t-2) \quad f_0(t) = \frac{1}{2}(t+1)(t-1)(t-2) \quad f_1(t) = -\frac{1}{2}(t+1)t(t-2) \quad f_2(t) = \frac{1}{6}(t+1)t(t-1)$

Rispetto a questa base la matrice associata a b è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi la segnatura è $(2, 2, 0)$.

b) Osserviamo che poiché la forma è non degenere per ogni sottospazio U abbiamo $\dim U^\perp = 4 - \dim U$. Quindi se vogliamo un sottospazio W che sia uguale al suo ortogonale dovrà essere $\dim W = 2$. Sia g_1 e g_2 una base di W e sia $g_1 = af_{-1} + bf_0 + cf_1 + df_2$ e $g_2 = \alpha f_{-1} + \beta f_0 + \gamma f_1 + \delta f_2$. La condizione W uguale al suo ortogonale è quindi equivalente a $b(g_i, g_j) = 0$ per $i, j = 1, 2$. Più esplicitamente otteniamo

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a\alpha - b\beta + c\gamma - d\delta = \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 0$$

Possiamo per esempio scegliere $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = \delta = 0$ in questo caso rimangono le equazioni

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a - b = 0.$$

Ricordandoci che g_1 deve essere linearmente indipendente con g_2 possiamo scegliere per esempio $a = b = 0$ e $c = d = 1$. Un sottospazio che verifica le condizioni richieste è quindi il sottospazio

$$W = \langle f_{-1} + f_0, f_1 + f_2 \rangle$$

3. Soluzioni del compito del 13 febbraio 2019: prima parte

Risposta alla domanda 1: $z = \pm(1-3i)$

Risposta alla domanda 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Risposta alla domanda 3: $(2,1,0)$.

Risposta alla domanda 4: $R(P) = \big((-1+\sqrt{3})/2, (1+\sqrt{3})/2\big)$

Risposta alla domanda 5: $\dim U \cap W = 3$

Risposta alla domanda 6: Vuol dire che $U + W = V$ e che $U \cap W = 0$.

4. Soluzioni del compito del 13 febbraio 2019: seconda parte

Soluzione esercizio 1. Sia $Z = U \cup W$. Supponiamo che non sia $U \subset W$ e dimostriamo che $W \subset U$. Sia $u \in U \setminus W$. Per ogni $w \in W$ abbiamo che $z = u + w \in Z$ perché Z è per ipotesi un sottospazio. Quindi $z \in U$ o $z \in W$. Se fosse $z \in W$ sarebbe $u = z - w \in W$ contro le nostre ipotesi su u. Quindi $z \in U$. Allora $w = z - u \in U$. Abbiamo quindi dimostrato che se $w \in W$ allora $w \in U$ ovvero $W \subset U$.

Soluzione esercizio 2. Osserviamo che F dovrà avere rango 2 e di conseguenza dimensione del nucleo uguale a 1. Quindi F ha sicuramente come autovalore 0 e 1 (per la terza ipotesi). Poiché F è non diagonalizzabile uno di questi autovalori dovrà avere molteplicità algebrica 2 e può essere solo 0. Quindi F avra' come autovalori 0, con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1 e 1 con molteplicità algebrica e geometrica 1. Una matrice con queste caratteristiche è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'applicazione L_A non soddisfa però la prima richiesta perché ha come immagine il sottospazio generato da e_1 ed e_3. Possiamo però pensare che A sia la matrice associata ad F rispetto ad un'altra base. Se prendiamo la base $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_2, v_3 = e_3$ e scegliamo F come l'applicazine lineare tale che $[F]_v^v = A$, questa ha tutte le proprietà richieste infatti l'immagine sarà generata dai vettori v_1 e v_3, ovvero il sottospazio richiesto. Per calcolare la matrice associata ad F rispetto alla base standard in partenza e in arrivo effettuiamo il cambiamento di base. Abbiamo

$$[Id]_e^v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad [Id]_v^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$[F]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 3. Siano A, B, C le matrici associate a P, R, F rispetto alla base standard. Quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F è autoaggiunta se e solo se $c = f = 0$ e $b = d$. In questo caso abbiamo che e_3 è un autovettore e poiché R è una isometria lineare abbiamo$Re_3 = \pm e_3$.

Se $Re_3 = e_3$ allora R è una rotazione attorno all'asse z e $a = e = \cos\theta$ e $d = -b = \sin\theta$. Quindi $d = b$ se e solo se $\theta = 0, \pi$.

Supponiamo ora che $Re_3 = -e_3$. Osserviamo che W è ortogonale a e_3 e quindi se $R(W) = W$ quindi $g = h = 0$. Quindi la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

che rappresenta la restrizione di R a W è una matrice ortogonale di determinante -1 ovvero ad una riflessione. L'asse di questa riflessione è anche l'asse ℓ della rotazione e quindi abbiamo che $\ell \subset W$ e che l'angolo di rotazione è pari a π radianti.

Quindi esistono due possibili casi: $\ell = \mathbb{R}e_3$ o $\ell \subset W$. In entrambe i casi $\theta = \pi$.

Soluzione esercizio 4. Una base del sottospazio in questione e' data da $v_1 = e_1 - e_2$, $v_1 = e_1 - e_3$, $v_1 = e_1 - e_4$. La matrice associata alla restrizione di b a W rispetto alla base v_1, v_2, v_3 ha entrate uguali a $b(v_i, v_j)$. Effettuando il calcolo otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolo il determinante dei minori 1×1, 2×2, 3×3 a partire da quello in basso a destra. Ottengo i valori $-1, 1, 4$. Quindi per il criterio di Sylvester la restrizione di b a W ha segnatura $(1, 2, 0)$.

5. Soluzioni compitino del 12 febbraio 2019: prima parte versione AAB

Domanda 1. $4/\sqrt{30}$.

Domanda 2. $\pm(2 + i)$

Domanda 3. -27

Domanda 4. 4

Domanda 5. B, C, D

Domanda 6. Il sottospazio vettoriale generato da u, v, w, detto $Spav(u, v, w)$ è definito nel modo seguente

$$Span(u, v, w) = \{au + bv + cw \ : \ a, b, c \in K\}$$

Soluzioni compitino del 12 febbraio 2019: seconda parte

Soluzione esercizio 1. Sia x un elemento di $Span(u, v, w)$ allora esistono tre scalari $a, b, c \in K$ tali che $x = a\,u + b\,v + c\,w$. Poiché E è un sottospazio vettoriale è chiuso per moltiplicazione per scalare, quindi da $u, v, w \in E$ ricaviamo $au, bv, cw \in E$. Inoltre essendo chiuso anche per somma ricaviamo che $x = au + bv + cw \in E$.

Soluzione esercizio 2. Osserviamo che $e_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$ sono una base di W e che $e_3 = (0, 0, 1)$ è un elemento di U ma non di W. In particolare e_1, v_2, e_3 è una base di $\mathbb{C}^3$. Calcoliamo la matrice associata ad F rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo. Abbiamo

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad F(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$[F]^{e_1, v_2, e_3}_{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare la matrice associata ad F rispetto alle basi standard in arrivo e in partenza effettuo il cambiamento di base. Abbiamo

$$[Id]^{e_1, v_2, e_3}_{e_1, e_2, e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{quindi la sua inversa è } [Id]^{e_1, e_2, e_3}_{e_1, v_2, e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e otteniamo

$$[F]^{e_1, e_2, e_3}_{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 3. I polinomi $g_1 = t+1, g_2 = t^2+1, g_3 = t^3+1, g_4 = t^4+1$ sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di W. In particolare W ha dimensione 4. Sia $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$F\big(p(t)\big) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}.$$

Per definizione di U abbiamo che $U \cap W = N(F)$. Calcoliamo la matrice associata ad F rispetto alla base g_i in partenza e standard in arrivo. Abbiamo

$$[F]^g_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

Se riduciamo la matrice a scalini otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

In particolare il nucleo ha dimensione due e una sua parametrizzazione si può ottenere scegliendo le variabili corrispondenti alla terza e quarta colonna come variabili libere. Ovvero, ricordandoci che stiamo usando la base g_i in partenza, otteniamo la seguente parametrizzazione del nucleo di F e quindi dell'intersezione $U \cap W$:

$$G(x,y) = (2x+6y)g_1 + (-3x-7y)g_2 + xg_3 + yg_4 = yt^4 + xt^3 + (-3x-7y)t^2 + (2x+6y)t$$

Soluzione esercizio 4. Ricordiamo che le due proiezioni P_X e P_Y sono date dalle applicazioni

$$P_X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_Y(v) = v - \frac{v \cdot u}{\|u\|} u$$

quindi la matrice associata ad F rispetto alla base standard è uguale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+s^2)/2 & -sc/2 \\ 0 & -sc/2 & c^2/2 \end{pmatrix}$$

dove ho posto $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$. Calcolando il polinomio caratteristico otteniamo

$$(1-t)(t^2 - t + \frac{c^2}{4})$$

le cui radici sono $1, \frac{1+\sin\theta}{2}, \frac{1-\sin\theta}{2}$. Per $\sin\theta \neq 0, \pm 1$ ottengo tre radici distinte quindi l'applicazione è diagonalizzabile.

Nei rimanenti casi scriviamo esplicitamente la matrice che otteniamo. Se $\sin\theta = \pm 1$ allora $\cos\theta = 0$ e la matrice che otteniamo è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è diagonale. Se $\sin\theta = 0$ allora $\cos\theta = \pm 1$ e la matrice che otteniamo è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

che è diagonale.

NOTA: nel secondo semestre farete un teorema che garantisce che una classe molto ampia di applicazioni lineari, di cui una F come nell'esercizio è un esempio molto particolare, è sempre diagonalizzabile.

6. Soluzioni del compitino del 31 maggio

Esercizio 1.

(1) Viene

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) No. Ad esempio

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

soddisfa le ipotesi ma non è simile ad A.

(3) È vero. La matrice B ha autovalore 3 con molteplicità geometrica 2 e -1 con molteplicità geometrica 1. Il determinante è il prodotto degli autovalori, quindi l'unica possibilità è che questi siano $3, 3, -1, -1$. Le molteplicità geometriche determinano in questo caso la matrice di Jordan di B che deve essere uguale a quella J di A.

Esercizio 2.

(1) Fatto a lezione.

(2) $(2, 1, 0)$.

(3) Basta prendere un vettore isotropo v ed un vettore w ortogonale a v. In tal caso, se $W = \text{Span}(v, w)$ otteniamo $W^\perp = \text{Span}(v)$. Ad esempio,

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il piano $W = \text{Span}(v, w) = \{x = 0\}$ funziona. Non è l'unica soluzione possibile.

In alternativa, basta notare che la restrizione di g al piano $W = \text{Span}(e_2, e_3)$ è degenere. Quindi $W \cap W^\perp$ ha dimensione almeno uno. D'altra parte, siccome g è non degenere $\dim W + \dim W^\perp = 3$, quindi $\dim W^\perp = 1$ e allora $W^\perp$ è interamente contenuto in W.

Esercizio 3. Una rototraslazione di asse

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

di angolo $\frac{\pi}{2}$ e di passo 1 funziona. Facendo i conti:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questa non è l'unica soluzione possibile.

Esercizio 4. Per il teorema spettrale L_S ha una base ortonormale di autovettori, rispetto alla quale l'endomorfismo si scrive come una matrice diagonale D. Siccome $D^2 = I$, gli autovalori sono solo ± 1. Quindi L_S è una riflessione rispetto all'autospazio $V = V_1$ con autovalore 1.

Risposte del compito del 3 giugno: prima parte

Risposta 1. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Risposta 2. Per $t \neq 1$.

Risposta 3. $\frac{5}{2}$

Risposta 4. n

Risposta 5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Risposta 6. 4.

7. Soluzioni del compito del 3 giugno: seconda parte

Esercizio 1. Fatto a lezione.

Esercizio 2.

(1) La matrice associata a f nella base canonica di $M(2)$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2-2)$ ed ha quattro radici distinte $1, 2, \pm\sqrt{2}$. Quindi f è diagonalizzabile. Una base di autovettori è

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

con autovalori rispettivi $1, 2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

(2) Abbiamo $X = v_1 - v_2$. Quindi $f(v_1 - v_2) = v_1 - 2v_2$ e iterando $f^n(v_1 - v_2) = v_1 - 2^n v_2$. Quindi

$$f^4(X) = v_1 - 2^4 v_2 = \begin{pmatrix} -15 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. La retta ed il piano si intersecano in $P = (-1, 1, 1)$. Sposto l'origine in P. Nelle nuove coordinate r e π diventano

$$r = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \pi = \{z' = 0\}.$$

Posso usare una rototraslazione di asse $\text{Span}(e_2)$, di angolo $\frac{\pi}{4}$ e di passo 1. Questa non ha punti fissi e $f(\pi) \supset r$. La scrivo:

$$f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nelle coordinate originali si ottiene

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questa non è l'unica soluzione possibile.

Esercizio 4. Scriviamo

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 2k-2 \end{pmatrix}$$

(1) Troviamo $\det A = 1 - k^2$ e $\det \bar{A} = 2(k-1)$. Quindi per $k \neq 1$ è non degenere. Usando Jacobi si vede che è sempre indefinita per $k \neq 1$. Quindi è una ellisse per $|k| < 1$, parabola per $k = -1$ e iperbole per $|k| > 1$. Per $k = 1$ l'equazione diventa

$$C_1 = \{x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0\} = \{(x+y)(x+y+2) = 0\}$$

e quindi C_1 è unione di due rette parallele.

(2) Per $k \neq \pm 1$ troviamo il centro

$$-\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}.$$

Per $k = -1$ non ci sono centri. Per $k = 1$ la retta $x + y + 1 = 0$ è formata da centri.

(3) Gli autovalori di A sono $1 \pm k$ e gli autovettori corrispondenti sono ortogonali per il teorema spettrale. Quindi per ogni $|k| = 1$ esiste un sistema di riferimento in cui l'ellisse ha la forma

$$(1+k)x^2 + (1-k)y^2 = C$$

per qualche $C > 0$. Dividendo per C otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a^2 = C/(1+k)$ e $b^2 = C/(1-k)$. Il rapporto fra gli assi è dunque
$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}.$$

(4) I punti all'infinito sono le soluzioni di
$$x^2 + 2kxy + y^2 = 0$$
e cioè $(-k \pm \sqrt{k^2-1}, 1)$. Quindi gli asintoti sono
$$\left\{ -\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -k \pm \sqrt{k^2-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Risposte del compito del 24 giugno 2019: prima parte

Risposta 1. 4.

Risposta 2. $\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Risposta 3. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, oppure una qualsiasi terna di vettori multipli di questi.

Risposta 4. 1.

Risposta 5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Risposta 6. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

8. Soluzioni del compito del 24 giugno 2019: seconda parte

Esercizio 1. Fatto a lezione.

Esercizio 2. Si prende come base di $\mathbb{R}^4$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
I primi due vettori sono una base di U, quindi gli ultimi due generano un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$. In questa base, si può prendere l'endomorfismo con matrice associata
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Nella base canonica diventa
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Questa non è l'unica soluzione possibile.

Esercizio 3. I due piani si intersecano in una retta r e sono ortogonali. Quindi basta fare una rototraslazione lungo r di angolo $\frac{\pi}{2}$ e di un certo passo $a \neq 0$, ad esempio $a = 1$. Facendo i conti troviamo
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Non è l'unica soluzione, ad esempio si può ruotare di $\frac{3\pi}{2}$.

Esercizio 4. La matrice associata rispetto alla base canonica $1, x, x^2$ è

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3/2 \\ -1 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Usando Jacobi dal basso si trova la sequenza $1, 3, -9/4, -6$. Quindi la segnatura è $(2, 1, 0)$. Per il secondo punto è sufficiente prendere un $p(x)$ isotropo ed un $q(x)$ ortogonale a $p(x)$. Ad esempio

$$p(x) = 1, \quad q(x) = x + x^2.$$

Risposte compito luglio 2019: prima parte

Risposta 1. $r = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$;

Risposta 2. $(3/2, 5/2, 2)$;

Risposta 3. $\varepsilon \neq -1$;

Risposta 4. $rango = 2$;

Risposta 5. C, E;

Risposta 6. A, C, E.

9. Soluzioni compito luglio 2019: seconda parte

Esercizio 1.

(1) $g(v, v) > 0$ per ogni $v \neq 0$.
(2) Vale

$$^t x(S + S')x =^t xSx +^t xS'x > 0$$

per ogni $x \neq 0$, perché $^t xSx > 0$ e $^t xS'x > 0$.

Esercizio 2. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (\lambda - 2)^4$. Troviamo

$$\dim \ker(A - 2I) = 2, \quad \dim \ker(A - 2I)^2 = 1.$$

Quindi l'unica forma di Jordan possibile è questa:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La forma di Jordan di A^3 è la stessa di quella di J^3 perché A e J sono matrici simili e quindi lo sono anche A^3 e J^3. Facendo i conti a blocchi troviamo che

$$J^3 = \begin{pmatrix} 8 & a & b & 0 \\ 0 & 8 & c & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

per qualche $a, b, c > 0$. Questa matrice ha $p(\lambda) = (\lambda - 8)^4$, $\dim \ker(J^3 - 8I) = 2, \dim \ker(J^3 - 8I)^2 = 1$ e quindi come sopra concludiamo che la sua matrice di Jordan è

$$J^3 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Le due rette si disegnano abbastanza facilmente.

(1) Le rette sonno entrambe orizzontali, quindi s è verticale e si trova

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) Ad esempio, una rototraslazione lungo s di passo 2 e angolo $\frac{\pi}{2}$ funziona. Troviamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Una rotazione di π (cioè una riflessione) intorno all'asse

$$s' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

funziona. Troviamo quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Otteniamo

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1-t & t-1 \\ t & t-1 & 2-t \end{pmatrix}.$$

Con il criterio di Jacobi troviamo

$$1, \; 1, \; \det A = 1 - t, \; \det \bar{A} = (t-1)^2(t+1).$$

Quindi:

- per $t \in (-1, 1)$ la matrice $\bar{A}$ è definita e quindi $C_t = \emptyset$,
- per $t < -1$ e $t > 1$ si ottiene rispettivamente una ellisse e una iperbole,
- per $t = \pm 1$ la conica è degenere. Si ottengono

  $$x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 3 = 0, \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

  che possono essere riscritte come

  $$(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 0, \quad (x+1)^2 = 0.$$

  La prima è il punto $(1, 1)$, la seconda è la retta $x = -1$ doppia.

Per $t \notin [-1, 1)$, la conica ha centro $(-t, 1)$. Per $t = 1$ tutti i punti della retta $x = -1$ sono un centro.

Risposte alla prima parte del compito del 12 settembre 2019

Risposta 1. $z = \frac{e}{2} + i\frac{e}{2}$.

Risposta 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Risposta 3. C,E

Risposta 4. 3

Risposta 5. A,D,E

Risposta 6. A,B,C,E

Esercizio 1. a) Definizione di applicazione autoaggiunta. Sia V uno spazio vettoriale e g un prodotto scalare o un prodotto hermitiano su V. Sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare. T si dice autoaggiunta rispetto a g se per ogni $u, v \in V$ si ha $g(Tu, v) = g(u, Tv)$.

Enunciato del teorema spettrale. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita. Sia g un prodotto hermitiano definito positivo su V e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare. Allora T è autoaggiunta se e solo se esiste una base ortonormale di autovettori.

b) Essendo T autoaggiunta esiste una base ortonormale di autovettori. Sia u_1, u_2, u_3 una tale base e sia u_i di autovalore i. Sia $v \in V$ e $\|v\| = 1$. Scriviamo v nella base u_i: $v = x\,u_1 + y\,u_2 + z\,u_3$.

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = 1 && \text{poiché gli } u_i \text{ sono ortonormali} \\ T(v) &= x\,u_1 + 2y\,u_2 + 3z\,u_3 && \text{poiché } T(u_i) = iu_i \\ \|T(v)\|^2 &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 && \text{poiché gli } u_i \text{ sono ortonormali} \end{aligned}$$

dove nell'ultima relazione abbiamo utilizzato anche la formula che la precede. Confrontando le formule per $\|v\|$ e $\|T(v)\|$ otteniamo $\|T(v)\|^2 \leqslant 9\|v\|^2 = 9$. Estraendo la radice quadrata otteniamo la tesi.

Esercizio 2. Calcoliamo innanzitutto le dimensioni di U e W. Esprimiamo i generatori di U nella base standard $1, \ldots, t^4$ di V. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{scambiando la prima e la terza riga e riducendo a scalini otteniamo} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che osserviamo avere rango 3. Quindi $\dim U = 3$ e i generatori proposti sono in realtà una base di U. Per calcolare la dimensione del secondo sottospazio osserviamo che W è lo spazio dei polinomi che si annullano in $0, 1, 2$ ovvero dei polinomi della forma

$$f(t) = t(t-1)(t-2)(at+b)$$

e quindi W ha dimensione 2 (questo lo abbiamo fatto varie volte a lezione, non c'era bisogno di specificare oltre). Per calcolare la dimensione di $U \cap W$ consideriamo l'applicazione $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $F(p) = (p(0), p(1), p(2))$ e osserviamo che $U \cap W = \ker F$. Nella base standard in arrivo e dei generatori di U proposti dall'esercizio in partenza, otteniamo che la matrice associata a F è

$$[F]^{t^2-2t, t^2-t-1, (t-1)^3}_{e_1, e_2, e_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e riducendo a scalini otteniamo} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Dalla formula della dimensione otteniamo che

$$\dim U \cap W = \dim U - rango(F) = 3 - 2 = 1.$$

Infine dalla formula di Grassmann otteniamo che

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Esercizio 3. La matrice $A - 2I$ ha determinante $2k^2(k+1)$. Quindi 2 è autovalore per $k = 0$ e $k = -1$. Studiando separatamente questi valori si vede che A ha 3 autovalori distinti sia per $k = -1$ che per $k = 0$ e quindi è diagonalizzabile in entrambi i casi.

Esercizio 4. La retta è

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

I punti di intersezione con r_1 e r_2 sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Il piano π è quello ortogonale alla retta s nel punto medio del segmento AB. Il punto medio è

$$\begin{pmatrix} 5/6 \\ 5/6 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Quindi
$$\pi = \{x + y - 2z = -1\}.$$
Come f basta prendere una riflessione rispetto a π. Si ottiene
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$