COMPITINO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE DI VENERDÌ 14 FEBBRAIO 2020: PRIMA PARTE

Istruzioni: Avete 45 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Inserite le risposte, senza motivazione, negli appositi riquadri. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________

Domanda 1. Sia $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$. Calcolare il coseno dell'angolo $\widehat{BAC}$.

$\cos \widehat{BAC} =$

Domanda 2. Sia $T : \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^6$ una applicazione $\mathbb{C}$-lineare surgettiva. Sia U un sottospazio di $\mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C})$ di dimensione 7. Sapendo che $N(T) + U = \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C})$ calcolare $\dim N(T) \cap U$.

$\dim N(T) \cap U =$

Domanda 3. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ l'applicazione lineare $F(p(t)) = t\,p(0) + p(t+1)$, scrivere la matrice associata a F rispetto alla base $1, 1+t, t^2$ in partenza e standard in arrivo.

$[F]^{1,1+t,t^2}_{1,t,t^2} =$

Domanda 4. Sia A una matrice 4×6 di rango 4. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^4$;
B) L'applicazione L_A è iniettiva;
C) La trasposta di A ha rango 6.

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare e u_1, u_2, u_3 una base di $\mathbb{R}^3$ e sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false).

A) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora $F(e_2 + e_3) = 5\,e_1 + 2\,e_2$;
B) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora il rango di F è 2;
C) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora $e_1 + e_2$ appartiene all'immagine di F;

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se v è un autovettore di F allora v è un autovettore di F^2;
B) Se 2 è un autovalore di F allora 4 è un autovalore di $2F$;
C) Se $\det F = 0$ allora 1 è un autovalore di F.

Le frasi vere sono

Compitino di Geometria e algebra lineare di venerdì 14 febbraio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 45 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Inserite le risposte, senza motivazione, negli appositi riquadri. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Sia $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$. Calcolare il coseno dell'angolo $\widehat{BAC}$.

$\cos \widehat{BAC} =$

Domanda 2. Sia $T : \mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^5$ una applicazione $\mathbb{C}$-lineare surgettiva. Sia U un sottospazio di $\mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C})$ di dimensione 7. Sapendo che $N(T) + U = \mathrm{Mat}_{3\times5}(\mathbb{C})$ calcolare $\dim N(T) \cap U$.

$\dim N(T) \cap U =$

Domanda 3. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ l'applicazione lineare $F(p(t)) = t^2\, p(0) + p(t+1)$, scrivere la matrice associata a F rispetto alla base $1, 1 + t, t^2$ in partenza e standard in arrivo.

$[F]^{1,1+t,t^2}_{1,t,t^2} =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare e u_1, u_2, u_3 una base di $\mathbb{R}^3$ e sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false).

A) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora il rango di F è 2;
B) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora $e_1 + e_2$ appartiene all'immagine di F;
C) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora $F(e_2 + e_3) = 5\, e_1 + 2\, e_2$;

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia A una matrice 4×6 di rango 4. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) L'applicazione L_A è iniettiva;
B) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^4$;
C) La trasposta di A ha rango 6.

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se 2 è un autovalore di F allora 4 è un autovalore di $2F$;
B) Se $\det F = 0$ allora 1 è un autovalore di F;
C) Se v è un autovettore di F allora v è un autovettore di F^2.

Le frasi vere sono

Compitino di Geometria e algebra lineare di venerdì 14 febbraio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 45 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Inserite le risposte, senza motivazione, negli appositi riquadri. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Sia $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (1, 0, 3)$. Calcolare il coseno dell'angolo $\widehat{BAC}$.

$\cos \widehat{BAC} =$

Domanda 2. Sia $T : \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^4$ una applicazione $\mathbb{C}$-lineare surgettiva. Sia U un sottospazio di $\mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C})$ di dimensione 7. Sapendo che $N(T) + U = \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C})$ calcolare $\dim N(T) \cap U$.

$\dim N(T) \cap U =$

Domanda 3. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ l'applicazione lineare $F(p(t)) = t\, p(0) + p(t-1)$, scrivere la matrice associata a F rispetto alla base $1, 1+t, t^2$ in partenza e standard in arrivo.

$[F]^{1,1+t,t^2}_{1,t,t^2} =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare e u_1, u_2, u_3 una base di $\mathbb{R}^3$ e sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false).

A) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora $F(e_2 + e_3) = 5\, e_1 + 2\, e_2$;
B) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora il rango di F è 2;
C) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora $e_1 + e_2$ appartiene all'immagine di F;

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se v è un autovettore di F allora v è un autovettore di F^2;
B) Se 2 è un autovalore di F allora 4 è un autovalore di $2F$;
C) Se $\det F = 0$ allora 1 è un autovalore di F.

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia A una matrice 4×6 di rango 4. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^4$;
B) L'applicazione L_A è iniettiva;
C) La trasposta di A ha rango 6.

Le frasi vere sono

Compitino di Geometria e algebra lineare di venerdì 14 febbraio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 45 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Inserite le risposte, senza motivazione, negli appositi riquadri. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (2, 1, 3)$. Calcolare il coseno dell'angolo $\widehat{BAC}$.

$\cos \widehat{BAC} =$

Domanda 2. Sia $T : \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^3$ una applicazione $\mathbb{C}$-lineare surgettiva. Sia U un sottospazio di $\mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C})$ di dimensione 7. Sapendo che $N(T) + U = \mathrm{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{C})$ calcolare $\dim N(T) \cap U$.

$\dim N(T) \cap U =$

Domanda 3. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ l'applicazione lineare $F(p(t)) = t^2\, p(0) + p(t-1)$, scrivere la matrice associata a F rispetto alla base $1, 1+t, t^2$ in partenza e standard in arrivo.

$[F]^{1,1+t,t^2}_{1,t,t^2} =$

Domanda 4. Sia A una matrice 4×6 di rango 4. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) L'applicazione L_A è iniettiva;
B) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^4$;
C) La trasposta di A ha rango 6.

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare e u_1, u_2, u_3 una base di $\mathbb{R}^3$ e sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false).

A) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora $F(e_2 + e_3) = 5\, e_1 + 2\, e_2$;
B) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora il rango di F è 2;
C) Se $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2} = A$ allora $e_1 + e_2$ appartiene all'immagine di F;

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $\det F = 0$ allora 1 è un autovalore di F;
B) Se v è un autovettore di F allora v è un autovettore di F^2;
C) Se 2 è un autovalore di F allora 4 è un autovalore di $2F$.

Le frasi vere sono

Compitino di Geometria e algebra lineare di venerdì 14 febbraio 2020: seconda parte

Istruzioni: Avete 2 ore e 15 minuti di tempo a disposizione. Motivate le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia V un K-spazio vettoriale e siano $v_1, v_2, v_3 \in V$.

a) cosa vuol dire che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti? Dare la definizione.
b) sia $F : K^3 \longrightarrow V$ l'applicazione lineare $F(x, y, z) = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Si dimostri che se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti allora F è iniettiva.

Esercizio 2. Si risolva la seguente equazione con $z \in \mathbb{C}$.

$$z^2 + (1 - i)z + 2 - 2i = 0 \ .$$

Esercizio 3. Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{C})$. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $F : E \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da $F(X) = AX - XA$. Si determini $\mathrm{Im}(F) \cap N(F)$.

Esercizio 4. Siano A, B le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Sia $U = N(L_A)$ e $W = \mathrm{Im}(L_B)$ e siano $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $G : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in U \qquad \text{e} \qquad G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W \ .$$

a) Determinare $U \cap W$;
b) Dire se esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $L(v) = F(v)$ se $v \in U$ e $L(v) = -G(v)$ se $v \in W$.
c) Mostrare che esiste una unica applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $L(v) = F(v)$ se $v \in U$ e $L(v) = G(v)$ se $v \in W$.

1. Soluzioni alla prima parte del compitino del 14 febbraio 2020: prima versione

Domanda 1. $\cos \widehat{BAC} = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

Domanda 2. $\dim N(T) \cap U = 1$.

Domanda 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 4. A

Domanda 5. B,C

Domanda 6. A,B

2. Soluzioni alla prima parte del compitino del 14 febbraio 2020: seconda versione

Domanda 1. $\cos \widehat{BAC} = \frac{4}{\sqrt{22}}$.

Domanda 2. $\dim N(T) \cap U = 2$.

Domanda 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 4. A,B

Domanda 5. B

Domanda 6. A,C

3. Soluzioni alla prima parte del compitino del 14 febbraio 2020: terza versione

Domanda 1. $\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Domanda 2. $\dim N(T) \cap U = 3$.

Domanda 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 4. B,C

Domanda 5. A,B

Domanda 6. A

4. Soluzioni alla prima parte del compitino del 14 febbraio 2020: quarta versione

Domanda 1. $\cos \widehat{BAC} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Domanda 2. $\dim N(T) \cap U = 4$.

Domanda 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 4. B

Domanda 5. B,C

Domanda 6. B,C

5. Soluzioni alla seconda parte del compitino del 14 febbraio 2020

Soluzione esercizio 1. a) v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti se presi $a, b, c \in K$ tali che $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ allora $a = b = c = 0$.

b) Basta dimostrare che $N(F)$ è zero. Sia $(x, y, z) \in N(F)$ allora $xv_1 + yv_2 + zv + 3 = 0$, ma essendo v_1, v_2, v_3 linearmente indipendenti questo implica $x = y = z = 0$. Quindi $(0, 0, 0)$ è l'unico elemento di $N(F)$.

Soluzione esercizio 2. Calcoliamo il delta dell'equazione di secondo grado. Otteniamo
$$\Delta = (1-i)^2 - 8 + 8i = -8 + 6i \ .$$
Calcoliamo le radici quadrate del delta. Ovvero cerchiamo $a+bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $(a+bi)^2 = -8+6i$. Otteniamo il sistema
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ ab = 6 \end{cases}$$
sostituendo $b = a/3$ nella prima equazione otteniamo $a^4 + 8a^2 - 9 = 0$. Ponendo $c = a^2$ otteniamo che c è un numero positivo che risolve l'equazione $c^2 + 8c - 9 = 0$. Risolvendo questa equazione di secondo grado ricaviamo $c = 1$. Quindi le radici di Δ sono $1 + 3i$ e $-1 - 3i$. Quindi
$$z = \frac{i - 1 \pm (1+3i)}{2} \ .$$
Le soluzioni sono quindi $z = 2i$ e $z = -1 - i$.

Soluzione esercizio 3. Risolviamo questo esercizio in due modi (non molto dissimili l'uno dall'altro a dire il vero).

Primo modo: Sia
$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$
Allora
$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b & 0 \\ 2a-2d & 2b \end{pmatrix}$$
Quindi $N(F)$ è dato dalle equazioni $b = 0$ e $a = d$, ovvero $N(F)$ sono le matrici della forma
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \ .$$
L'immagine di F ha quindi dimensione 2 sono matrici della forma
$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & -x \end{pmatrix} \ .$$
Quindi l'immagine di F sono tutte le matrici di questo tipo. L'intersezione è quindi data dalle matrici della forma
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Secondo modo: Consideriamo la base standard di E data dalle matrici $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, indichiamola con $\mathcal{E}$. La matrice associata ad F in questa base è
$$[F]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$
Ne ricaviamo subito che il nucleo è generato da $E_{11} + E_{22}$ e E_{21} e l'immagine da E_{21} e $E_{11} - E_{22}$. Si conclude poi come nell'altro modo.

Soluzione esercizio 4. a) Riducendo la matrice B ricaviamo che B ha rango 3 e quindi che le tre colonne della matrice B che indichiamo con v_1, v_2, v_3 sono una base di W. Dalla riduzione di A ricaviamo che A ha rango 2. Ne deduciamo che U ha dimensione 2. Per determinare l'intersezione consideriamo un vettore $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$ di W e imponiamo che sia nel nucleo di $L(A)$. Otteniamo
$$L_A(v) = xL_A(v_1) + yL_A(v_2) + zL_A(v_3) = AB \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$
Ne ricaviamo Ricaviamo $y = 0$ e $x = z$. Quindi il nucleo è generato dal vettore
$$v_0 = (v_1 + v_3)/3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) una tale applicazione non esiste perche' dovrebbe soddisfare contemporaneamente

$$L(v_0) = F(v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad L(v_0) = -G(v_0) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Osserviamo che $F(v_0) = G(v_0)$. Sia v_0, w_2, w_3 una base di W e sia u_4 in $U \setminus W$ (un tale vettore esiste perche' U ha dimensione 2 e l'intersezione ha dimensione 1). Allora v_0, w_2, w_3, u_4 è una base di $\mathbb{R}^4$ e v_0, u_4 è una base di U. Una applicazione lineare è univocamente determinata dal valore che assume su una base il valore che assume su una base può essere assegnato a piacere. Se una tale applicazione esistesse in particolare avremmo

$$L(v_0) = G(v_0) = F(v) \qquad L(w_2) = G(w_2) \qquad L(w_3) = G(w_3) \qquad L(u) = F(u)$$

In particolare L è unica. Inoltre poiche' su una base di W, L coindide con G, abbiamo $L(w) = G(w)$ per ogni w in W e, poiche' su una base di U, L coindide con F, abbiamo $L(u) = F(u)$ per ogni u in U.