SEGNATURA

V sp. vettoriale con prodotto scalare g

Def: La SEGNATURA di g è (i_+, i_-, i_0)

$$\left.\begin{array}{l} i_+ = \max\{\dim W \subseteq V \text{ t.c. } g|_W \text{ è def}+\} \\ i_- = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{def}- \\ i_0 = \dim V^\perp \end{array}\right\} \text{INTRINSECO}$$

Sylvester: $\exists \ \mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonale

Inoltre se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonale,

$$\left.\begin{array}{l} i_+ = \text{numero di } v_i \text{ t.c. } g(v_i, v_i) > 0 \\ i_- = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad g \text{"} \quad \text{"} < 0 \\ i_0 = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad g(\quad) = 0 \end{array}\right\}$$

I numeri (i_+, i_-, i_0) non dipendono da $\mathcal{B}$

$\boxed{i_+ \geq k}$ $\qquad i_+ \leq k$

$v_1, \dots, v_k \qquad g(v_i, v_i) = 1$

$W^+ = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) \qquad g|_{W^+}$ è def+

(i_+, i_-, i_0)

$\Rightarrow \boxed{i_+ + i_- + i_0 = n}$

$= \dim V$

def+ $\Rightarrow$ non-deg

Nomenclatura: • g è def+ $\Leftrightarrow$ segnatura è $(n, 0, 0)$

infatti n è la massima dim. di $W \subseteq V$ su cui è def+

perché g è def+ su tutto V

Oss: Se g è def+ su V allora $g|_W$ è def+ $\forall W \subseteq V$

• g def− $\Leftrightarrow$ segnatura è $(0, n, 0)$

• g è non-degenere $\Leftrightarrow$ $i_0 = 0$ cioè

la segnatura è $(i_+, i_-, 0)$

- g è SEMIDEFINITO POSITIVO se $g(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in V$

  g è semidef + $\Longleftrightarrow$ segnatura è $(i_+, 0, i_0)$

- g è SEMIDEFINITO NEGATIVO se $g(v,v) \leq 0 \quad \forall v \in V$

  $\Longleftrightarrow$ segnatura è $(0, i_-, i_0)$

- g è INDEFINITO se $\exists\ v : g(v,v) > 0$

  $\exists\ w : g(w,w) < 0$

  $\Longleftrightarrow$ segnatura è (i_+, i_-, i_0) con $i_+ > 0$, $i_- > 0$

- g è NULLO se $g(v,w) = 0 \quad \forall v,w$

  $\Longleftrightarrow$ segnatura è $(0,0,n)$

Cor: S, S' matrici simmetriche. Sono congruenti $\Longleftrightarrow$ hanno la stessa segnatura

Criterio: Se $\det S > 0$ allora i_- è pari

$\det S < 0$ allora i_- è dispari

$\det S = 0$ allora $i_0 > 0$

Infatti: Sylvester $\Rightarrow$ S è congruente a D diagonale

$\Downarrow$

$\exists M$ invertibile per cui $D = {}^tM S M$

Se S e S' sono congruenti, allora $\det(S)$ e $\det(S')$ hanno lo stesso segno:

$$S = {}^tM S' M$$

$$\Rightarrow \quad \det(S) = \det({}^tM) \det S' \det M$$

$$= \underbrace{\det(M)^2}_{>0} \det S'$$

$\det S = 0 \iff \det S' = 0$

$> 0 \iff > 0$

$< 0 \iff < 0$

S congruente a D $\qquad \det(D) = d_1 \cdots d_n$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

S deg $\Leftrightarrow$ D deg $\Leftrightarrow$ $\det(D) = 0$

$\det(D) > 0 \Leftrightarrow$ I numeri d_i negativi sono pari $\Leftrightarrow$ i_- è pari

$\det S < 0 \Leftrightarrow \det D < 0 \Leftrightarrow i_-$ dispari

Oss: Se $S_{ii} > 0$ allora $i_+ > 0$

$S_{ii} < 0$ " $i_- > 0$

Infatti $S_{ii} = g(e_i, e_i) > 0 \Rightarrow i_+ > 0$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad \Uparrow$

$W = \mathrm{Span}(e_i) \Rightarrow g|_W$ è def+

Matrici 2x2

$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ matrice simmetrica generica 2×2

Calcoliamo la segnatura di S.

$S = \begin{pmatrix} \boxed{a} & b \\ b & \boxed{c} \end{pmatrix}$

A $\det S > 0$

$a = S_{11} = g(e_1, e_1)$

$c = S_{22} = g(e_2, e_2)$

Se $a > 0 \Rightarrow$ def +

$a < 0 \Rightarrow$ def −

C $S = 0 \Leftrightarrow g$ è nullo

Se $\exists$ el. sulla diag $> 0 \Rightarrow$ semidef + $(1,0,1)$

Se $\exists$ " " " $< 0 \Rightarrow$ semidef − $(0,1,0)$

$\det S$	Possibili segnature:	
A → > 0	$(2,0,0)$	def +
A → > 0	$(0,2,0)$	def −
B → < 0	$(1,1,0)$	indef
C → 0	$(1,0,1)$	semidef +
C → 0	$(0,1,1)$	semidef −
C → 0	$(0,0,2)$	nullo

degeneri

Esempio: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det < 0 \Rightarrow$ indef (110)

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det > 0$, $2 > 0 \Rightarrow$ def + (200)

$$\boxed{i_0 = \dim V^\perp = \dim \ker S}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ det = 0 ⟹ semi det +

$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ ⟹ semi det −

Esempio:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare segnatura.

$$\mathrm{rk}\, S = 2 \Rightarrow \dim \ker S = 4 - 2 = 2 \Rightarrow i_0 = 2$$

Possibili segnature:

(2, 0, 2) semi def +

~~(0, 2, 2)~~ semi def −

(1, 1, 2) indefinito

num pos su diagonale ⟹ $i_+ > 0$

$\boxed{(2,0,2)}$ $\boxed{(1,1,2)}$

?

Guardiamo restrizioni:

$W = \mathrm{Span}(e_2, e_3)$

$$[g|_W]_{e_2, e_3} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \leftarrow \det = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ segnatura di $g|_W$ è $(1, 1, 0)$ $\Rightarrow$ esistono vettori negativi in W

segnatura di g

(i_+, i_-, i_0)

$\vee| \quad \vee|$

$1 \quad 1$

$$i_+ \geq i_+^W$$
$$i_- \geq i_-^W$$

segnatura di $g|_W$

(i_+^W, i_-^W, i_0^W)

$(\overset{\shortparallel}{1} \quad \overset{\shortparallel}{1} \quad \overset{\shortparallel}{0})$

Esempi di vettori negativi in $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$?

$g(e_1, e_1) = 2 > 0$

$g(e_2, e_2) = 0$

$$(x \ y)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + xy + yx < 0$$

$$2x^2 + 2xy < 0$$

$$2x(x+y) < 0$$

$x > 0$

$x + y < 0$

Es. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è negativo}$$

$1 \cdot e_2 - 2 \cdot e_3$

Teo (Criterio di Jacobi):

$$S = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$d_i = \det(\text{minore } i \times i \text{ in alto a sinistra})$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 1$

$d_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4$

$d_3 = \det S = \dots$

S def $+ \iff d_i > 0 \ \forall i$

dim:

$\boxed{\Rightarrow}$ $d_i = \det S_i$

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{S_i} & \\ & \end{pmatrix}$$

$S_i = [g|_W]_{e_1, \dots, e_i}$

$W = \operatorname{Span}(e_1, \dots, e_i)$

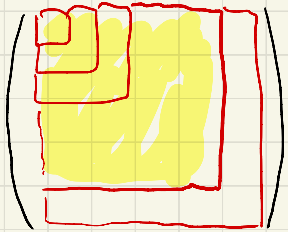
g def $+ \Rightarrow g|_W$ def $+ \Rightarrow \det S_i > 0$

$\Rightarrow i_- = 0 \nearrow$

$\boxed{\Leftarrow}$ Induzione su n taglia di S

$n=1$: $\quad S=(d) \qquad d>0 \Rightarrow S$ def + $\qquad (1,0,0)$

$n-1 \Rightarrow n$:

$S=$ 

$W_i = \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_i)$

$S_i = \left[g|_{W_i} \right]_{e_1,\dots,e_i}$

$d_i > 0$

Per induzione $\boxed{S_{n-1}}$ ha $\det S_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

$\Rightarrow S_{n-1}$ è def +

$g|_{W_{n-1}}$ è def + $\quad \Rightarrow \quad i_+ \geq n-1$

segnatura di S (i_+, i_-, i_0)

$d_1, d_2, \dots, d_n > 0$

Possibilità: $\quad \underbrace{(n-1,1,0)}_{<0} \quad \underbrace{(n-1,0,1)}_{=0} \quad \underbrace{(n,0,0)}_{>0}$

$d_n = \det S =$

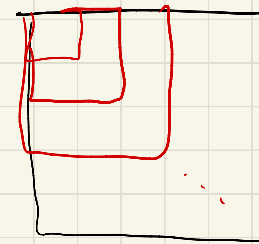
$d_n > 0 \Rightarrow$ ultimo caso

Criterio Jacobi $\quad S$ def $+ \iff \underline{d_1, \dots, d_n > 0}$

<u>Teo</u>: (Criterio di Jacobi): S $n \times n$ simmetrica

$$d_i = \det(S_i)$$

$$1, d_1, d_2, \dots, d_n$$



Se $d_i \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$

$i_+ =$ numero di permanenze di segno in

$i_- =$ " " cambiamenti di segno

<u>Esempio</u>: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Calcola segnatura al variare di $a \in \mathbb{R}$

$d_1 = 1 \qquad d_2 = 2 \qquad d_3 = 6 + a(-2a) = 6 - 2a^2$

Se $d_3 \neq 0$ posso applicare Jacobi

cioè $a \neq \pm\sqrt{3}$

Se $d_3 > 0$, cioè $3 - a^2 > 0$, cioè $|a| < \sqrt{3}$, cioè $a \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$$\underset{d_1}{1}, \underset{d_2}{1}, \underset{d_3}{2}, d_3 > 0 \Rightarrow S \text{ è def } +$$

Se $d_3 < 0$, cioè $|a| > \sqrt{3}$, cioè $a > \sqrt{3}$ oppure $a < -\sqrt{3}$

$$\underset{+}{1}, \underset{+}{1}, \underset{+}{2}, \underset{-}{d_3} < 0 \Rightarrow (2, 1, 0)$$

Se $d_3 = 0$ Jacobi non si applica $a = \pm\sqrt{3}$

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \pm\sqrt{3} \\ & 0 \\ \pm\sqrt{3} \quad 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{rk } S = 2 \Rightarrow i_0 = 1$$

def+

Casi: $\boxed{(2, 0, 1)}$ $(1, 1, 1)$ $(0, 2, 1)$

$W = \text{Span}(e_1, e_2)$ $g|_W$ def+

Esercizi: tutti 7.12-20

7.12/13/14 7.14.

$V = \mathbb{R}_3[x]$ $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$

- trova segnatura
- determina radicale
- " " $W^\perp$ con $W = \mathrm{Span}(x + x^2)$

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{0} & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ $\mathcal{B} = \{\underset{p_1}{x-1}, \underset{p_2}{x+1}, \underset{p_3}{x^2-1}, \underset{p_4}{x^3-1}\}$

Uso $\mathcal{B}$:

$\langle p_1, p_1 \rangle = 0 + 0 = 0$

$\langle p_1, p_2 \rangle = 0 + (-2 \cdot 2) = -4$

$\langle p_1, p_3 \rangle = 0 + (-2 \cdot 0) = 0$

$\langle p_1, p_4 \rangle = 0 + (-2 \cdot 0) = 0$

$\langle p_2, p_2 \rangle = 2 \cdot 0 + 0 = 0$

$\langle p_2, p_3 \rangle = 2 \cdot 0 + 0 = 0$

$\langle p_2, p_4 \rangle = 2 \cdot (-2) + 0 = -4$

$\langle p_3, p_3 \rangle = 0$ $\quad \langle p_4, p_4 \rangle = 0 + 0 = 0$ $\quad p_3 \in V^\perp$

$\langle p_3, p_4 \rangle = 0$

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rk} S = 2 \Rightarrow i_0 = 4 - 2 = 2$

possibilità

$(2,0,2)$ $\quad (1,1,2)$ $\quad (0,2,2)$

$\det \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow W = \operatorname{Span}(e_1, e_2)$

$g|_W$ ha segn. $(1,1,0) \Rightarrow i_+ \geq 1$

$i_- \geq 1$

Radicale: $\quad \operatorname{Ker} S = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$V^\perp = \operatorname{Span}(p_3, p_1 - p_4)$

$= \operatorname{Span}(x^2 - 1, (x-1) - (x^3 - 1)) = \operatorname{Span}(x^2 - 1, -x^3 + x)$

- $W = \mathrm{Span}(x+x^2)$ $\qquad W^\perp = ?$

$$\langle p,q\rangle = p(1)q(-1)+p(-1)q(1)$$

$$W^\perp = \{a+bx+cx^2+dx^3 \mid \langle \underbrace{a+bx+cx^2+dx^3}_{p}, \underbrace{x+x^2}_{q}\rangle = 0\}$$

$$= \{\underbrace{(a+b+c+d)}_{p(1)}\underbrace{(-1+1)}_{q(-1)} + \underbrace{(a-b+c-d)}_{p(-1)}\underbrace{(1+1)}_{q(1)} = 0\}$$

$$= \{a-b+c-d=0\}$$

CARTESIANA

$$\boxed{a = b-c+d}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

PARAMETRICA $= \mathrm{Span}$

$b=1$
$c=0$
$d=0$

$$\to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Span}\{1+x, -1+x^2, 1+x^3\}$$

$$= \{b-c+d+bx+cx^2+dx^3\}$$

PARAMETRICA

$$= \{ b(1+x) + c(-1+x^2) + d(1+x^3) \} \rangle$$

PRODOTTI SCALARI DEF. +

V sp. vett. con prodotto scalare g definito positivo.

Def: La NORMA di un vettore $v \in V$

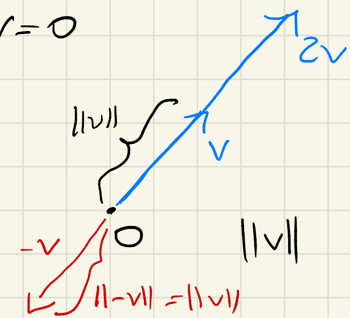
$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle} \quad \text{ha senso perché } \langle v,v\rangle \geq 0 \ \forall v \in V$$

Prop: a) $\|v\| > 0 \quad \forall v \neq 0 \qquad \|v\| = 0 \iff v = 0$

b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

c) $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

Disuguaglianza di Cauchy - Schwartz



$\|v\|$

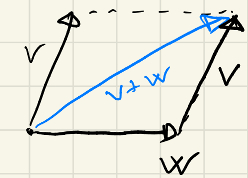
d) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

$\|-v\| = \|-1\cdot v\| = |-1| \cdot \|v\|$

$\lambda = -1 \qquad = \|v\|$

Disuguaglianza triangolare

a) $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} > 0 \iff v \neq 0$



b) $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle}$

$= |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \, \|v\|$

c) già vista I semestre

d) Segue da c)

$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2 \langle v, w \rangle$

$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \underbrace{\langle v, w \rangle}$

$\leq |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$

$\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \|v\| \, \|w\|$

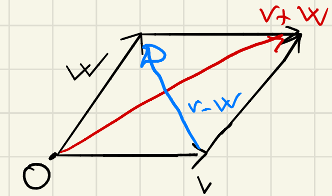
$\|v + w\|^2 = \left(\|v\| + \|w\| \right)^2$

$\Rightarrow \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

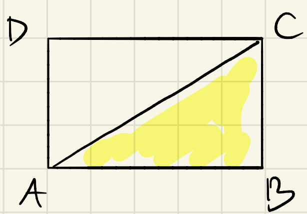
Es: LEGGE DEL PARALLELOGRAMMA

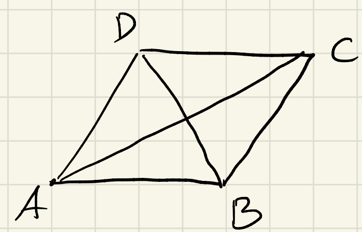
$$\|v+w\|^2+\|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)$$

$$|AC|^2+|BD|^2 = 2\left(|AB|^2+|AD|^2\right)$$



Oss: Se è un rettangolo





$$\cancel{2}|AC|^2 = \cancel{2}\left(|AB|^2+\underset{\substack{\shortparallel \\ |BC|^2}}{|AD|^2}\right)$$

dim:

$$\|v+w\|^2+\|v-w\|^2 \overset{?}{=} 2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)$$

$$\langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle \qquad 2\left(\langle v,v\rangle+\langle w,w\rangle\right)$$

$$= \langle v,v\rangle+\langle w,w\rangle+\cancel{2\langle v,w\rangle}+\langle v,v\rangle+\langle w,w\rangle-\cancel{2\langle v,w\rangle}$$

$$= 2\langle v,v\rangle + 2\langle w,w\rangle$$

$V \quad g \quad$ def+ $\qquad \|v\|$

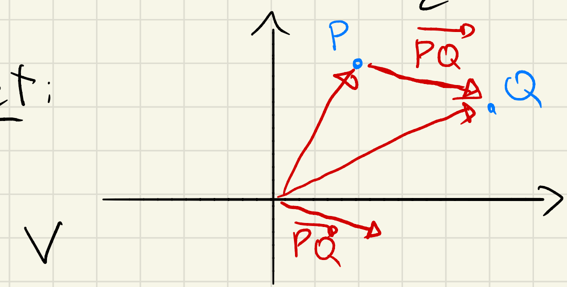
Def: $v, w \neq 0$ in V $\qquad$ C.S. $\boxed{-1 \leq \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|} \leq 1}$

L' ANGOLO fra v e w è $\vartheta \in [0,\pi]$ t.c. $\cos\vartheta = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}$

$$\vartheta = \arccos \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}$$

L'angolo è $\frac{\pi}{2} \iff \langle v,w\rangle = 0$ (v e w ortogonali)

Def:



$P, Q \in V$

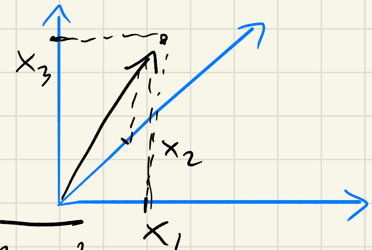
$\overrightarrow{PQ} = Q - P$

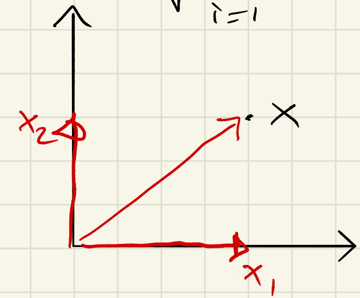
$d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|$

Es: Se $V = \mathbb{R}^n$ con y Euclideo

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$





$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \|y - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

$$d\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

Prop: Proprietà della distanza:

a) $d(P,Q) \geq 0 \qquad d(P,Q)=0 \iff P=Q$

b) $d(P,Q) = d(Q,P)$

c) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$

DISUGUAGL. TRIANGOLARE

dim:

a) $d(P,Q) = \|\vec{PQ}\| \geq 0$ è zero

$\iff \vec{PQ} = 0 \iff P=Q$

b) $d(P,Q) = \|\vec{PQ}\| = \|\vec{QP}\| = d(Q,P)$

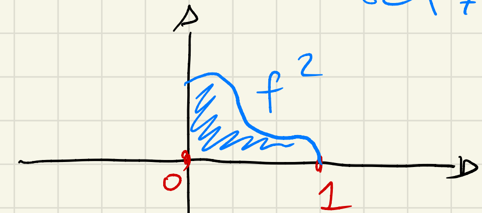
$\vec{PQ} = Q-P$

$\vec{QP} = P-Q = -\vec{PQ}$

c) $\|\vec{PR}\| \leq \|\vec{PQ}\| + \|\vec{QR}\|$

Esempio: $V = C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$ dim ∞

$f,g \in V \qquad \langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ è prodotto scalare è def+ : $\langle f,f\rangle = \int_0 f(t)\cdot f(t)\,dt = \int f^2(t)\,dt > 0$ se $f\neq 0$



C.S.: $|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\cdot\|w\|$

In questo contesto:

$$|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\cdot\|g\|$$

$$\left|\int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}\cdot\sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}$$

$$\boxed{\left(\int_0^1 f\cdot g\right)^2 \le \int_0^1 f^2\cdot\int_0^1 g^2}$$