Lezione 6

6.2 6.3 6.11 6.12

6.2: Elenca forme Jordan con $\underbrace{(\lambda-1)^2}(\lambda+2)^3 = p(\lambda)$

$m_a(1)=2$

$m_a(-2)=3$

$\deg p(\lambda)=5 \Rightarrow J \quad 5\times 5$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & & & \\ & \boxed{1} & & & \\ & & \boxed{-2} & & \\ & & & \boxed{-2} & \\ & & & & \boxed{-2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{-2} & & \\ & & \boxed{-2} & \\ & & & \boxed{-2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ & -2 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{-2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 & \\ & -2 & 1 \\ & & -2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$2\times 3=6$ possibili forme di Jordan

6.3: $f: \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ $\quad f(p) = p'$ è nilpotente di ordine $n+1$

Determina J

1) $\underbrace{f^k \neq 0}$ se $k < n+1$, 2) $\underbrace{f^{n+1} = 0}$

METODO 1

TESI: $f^{n+1}(p) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{C}_n[x]$

Derivata (n+1)-esima di $p(x)$ è sempre zero

$\exists p \in \mathbb{C}_n[x]$:

$f^k(p) \neq 0$

Infatti prendo $p(x) = x^n$

$f^k(x^n)$ = polinomio non nullo di grado $n-k$

METODO 2

$\mathcal{C} = \{1, x, \dots, x^n\}$

$$A = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n+1} \Big\} n+1$$

$f(1) = 0$

$f(x) = 1$

$f(x^2) = 2x$

$\vdots$

$f(x^i) = i x^{i-1} \quad \dots \quad f(x^n) = n x^{n-1}$

Gli autovalori sono tutti zero $\Leftrightarrow$ nilpotente ordine?

Ordine $n+1$: metodo 1) $A^k \neq 0 \quad \forall k \leq n$
$A^{n+1} = 0$ } verificare questo

metodo 2)

$m_a(0) = n+1$

$m_g(0) = \dim V_0 = \dim \ker A = n+1 - rk A = n+1-n = 1$

$\Rightarrow J$ ha un blocco solo

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = B_{0,n+1}$$

Metodo 3

J ha ordine di nilpotenza $n+1$

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{6}, \frac{x^4}{24}, \dots, \frac{x^i}{i!}, \dots, \frac{x^n}{n!} \right\}$$ base di Jordan

BASE DI TAYLOR

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$A \sim B$ Se A è nilp. di ordine K allora B è nilp. di ordine K

$$A^k = 0 \qquad A^i \neq 0 \quad \forall i < K$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$B^k = 0 \qquad B^i \neq 0$$

$\frac{x^3}{3} \to x^2$

$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$

6.11: A complessa quadrata $A^n = I \Rightarrow A$ diag.bile

quali sono i possibili autovalori?

Consiglio: fare $n=2,3$, in generale

J forma di Jordan di $A \rightsquigarrow J^n = I \rightsquigarrow B^n = I$

B blocco di J

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Esercizio}}{\Rightarrow} B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \star & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \star \\ & & & \lambda^n \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\star \neq 0}$$ Es.

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^n = 1} \Rightarrow \lambda \text{ radice n-esima di } 1$$

$$B^{2} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2\lambda \\ & & & \lambda^2 \end{pmatrix} \qquad \square = (\lambda\ 1\ 0 \cdots 0)\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 2\lambda \neq 0$$

No $\bigstar \Rightarrow B = (\lambda) \qquad B^n = (\lambda^n) = (1) = I$

$$J = \begin{pmatrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ & & & \square \end{pmatrix}$$

autovalori radici n-esime di 1

$$\lambda = e^{\frac{2\pi i p}{n}} \qquad p = 0, \dots, n-1$$

$A^2 = I \rightsquigarrow \lambda = \pm 1$ $\square$

$A^n = I$ Le radici n-esime di matrici non sono ben definite

$A^2 = I \Rightarrow A = \sqrt{I}$ non ha senso
non è ben definita

$\underline{6.12}$: A matrice $n \times n$ t.c. $A^2 - 2A + I = 0$

A diag. $\Longleftrightarrow$ $A = I$

$\underline{\text{svolg.}}$ $(A-I)^2 = 0 \dashrightarrow (J-I)^2 = 0 \dashrightarrow (B-I)^2 = 0$

Quali $B_{\lambda,n}$ soddisfano $(B-I)^2 = 0$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad B - I = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda-1 \end{pmatrix} = B_{\lambda-1,n}$$

$B_{\lambda-1,n}^2 = 0$? $\Longleftrightarrow$ $\lambda - 1 = 0$, $n \leq 2$ $\Rightarrow$ $\lambda = 1$

$B_{0,1} = (0)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{0,2}$ $\Rightarrow$ $B = (1)$ oppure $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} \boxed{} & & & & & \\ & \boxed{} & & & & \\ & & \boxed{\ } & & & \\ & & & \boxed{} & & \\ & & & & \boxed{\ } & \\ & & & & & \boxed{} \end{pmatrix}$ diag.bile $\Leftrightarrow$ blocchi tutti di ordine 1

$\Leftrightarrow$ $J = I$

$$\boxed{J = I \Rightarrow A = I}$$ perché $A \sim J$

L'unica matrice simile a I è I $\square$

$M^{-1} I M \to I$

Prodotti scalari

S = simmetrica $n \times n$

$g_S(x, y) = {}^t x \cdot S \cdot y$

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{ x \text{ t.c. } g_S(x,y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n \}$

$g_S(x,y) = g_S(y,x)$

$= \{ x \text{ t.c. } {}^t y S x = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n \}$

$Sx = 0$

$= \operatorname{Ker} S$

$\supseteq$

$\ker S = \{ x \text{ t.c. } \underline{Sx = 0} \}$

Congr è rel. eq. 1) $A \sim A$ $\qquad \sim$ congruente

2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ $\qquad A \equiv B$

3) $A \sim B \,,\, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$A \sim B \Leftrightarrow \exists M$ invertibile t.c. $A = {}^tM B M$

1) $A \sim A$ prendo $M = I$ $\qquad A = {}^tI A I$

2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$\underline{A = {}^tM B M}$ $\qquad \exists N = M^{-1}$

$\underline{{}^tN A N} = {}^tN\, {}^tM B \cancel{M N} = {}^t(\cancel{MN}) B = \underline{B}$

3) $A \sim B \,,\, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$$A = {}^t M B M \qquad B = {}^t N C N$$

$$A = {}^t M \, {}^t N C N M = {}^t(NM) C NM \Rightarrow A \sim C \qquad \square$$

Sottospazi ortogonali

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ $\qquad g$ prodotto scalare

$W \subseteq V$

$$W^\perp = \{ v \in V \mid g(v,w) = 0 \ \forall w \in W \} \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale}$$

Es: $\quad g$ Euclideo su $\mathbb{R}^2$ $\qquad W = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to W^\perp = \{ax + by = 0\}$

$$= \operatorname{Span}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

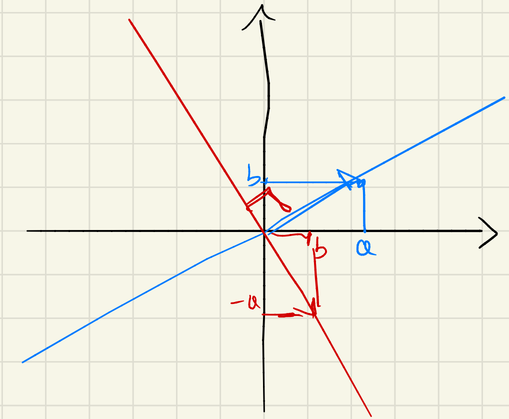
$g(e_1, e_1)$ $\quad g(e_1, e_2) = 0$

g_S con $S = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ non è degenere perché $\det S \neq 0 \Rightarrow$ radicale banale

non è def + $\quad g(e_2, e_2) < 0$

$g(e_2, e_2)$ $\qquad S_{ij} = g_S(e_i, e_j)$

$W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \qquad W^{\perp} = ?$



$$W^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g_S\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (a\ b) \cdot S \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \right\}$$

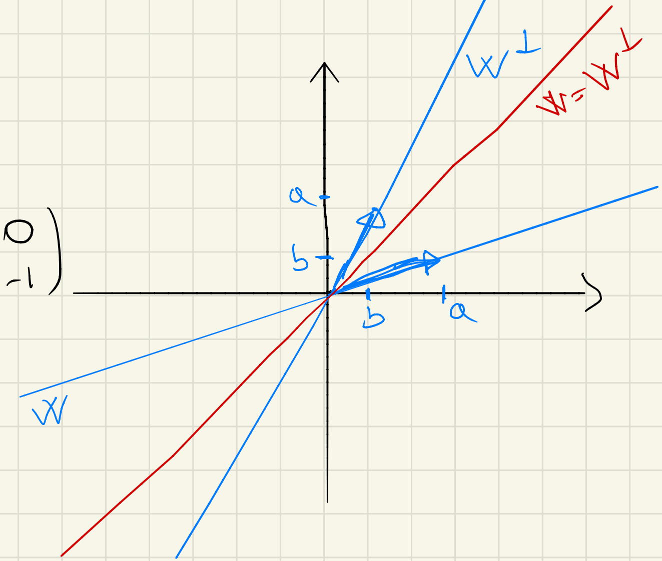
$g_S(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\vec{x}\, S\, \vec{y}$

$$= \left\{ (a\ b) \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (a\ b) \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ ax - by = 0 \right\}$$ CARTESIANA

$$= \mathrm{Span}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$$

W e $W^\perp$ possono non essere ortogonali in senso euclideo



Sono ortogonali per g_S $\quad S=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

<u>Es</u>: Se $a=b=1$

$$W=\text{Span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow W^\perp=\text{Span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Può capitare che $W=W^\perp$

<u>Def</u>: Se g è prodotto scalare su V e $W\subseteq V$ sottospazio indico con $g|_W$ la RESTRIZIONE di g a W

Teo: V sp. vett. su $\mathbb{R}$, g prodotto scalare. $W \subseteq V$ sottospazio

1) $\dim W^\perp \geq n - \dim W$ $\quad n = \dim V$

2) Se g è non-degenere allora $\dim W^\perp = n - \dim W$

3) Se $g|_W$ è non-degenere, allora $V = W \oplus W^\perp$

4) Se g è def $+$ allora $V = W \oplus W^\perp$

dim: 1) $w_1, \dots, w_k$ base di W $\quad k = \dim W \quad n = \dim V$

$k \leq n$

$$T : V \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$T(v) = \begin{pmatrix} g(v, w_1) \\ g(v, w_2) \\ \vdots \\ g(v, w_k) \end{pmatrix}$$

$$v \in \operatorname{Ker} T \iff \underbrace{g(v, w_1) = 0, \dots, g(v, w_k) = 0}_{} \iff v \in W^\perp$$

$v \in \ker T \iff v \in W^\perp$ cioè $\ker T = W^\perp$

Teo dimensione: $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = n$

$$\underline{\dim W^\perp} = n - \underbrace{\dim \operatorname{Im} T}_{\leq K} \geq \underline{n - K} \qquad 1)$$

$\dim \operatorname{Im} T \leq K$

perché $\operatorname{Im} T \subseteq \mathbb{R}^K$

$$1) \quad \underset{n}{\dim} W^\perp \geq n - \underset{K}{\dim} W$$

2) Se g è non-degenere allora $\dim W^\perp = n - \dim W$

$w_1, \dots, w_k$ base di W completo a base $w_1, \dots, w_n$ di V

$$T' : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$T'(v) \longmapsto \begin{pmatrix} g(v, w_1) \\ g(v, w_2) \\ \vdots \\ g(v, w_n) \end{pmatrix} \begin{matrix} \Big] K \\ \\ \end{matrix}$$

$$\ker T' = \{ v \in V : T(v) = 0 \} = \{ v : g(v, w_1) = 0 \dots g(v, w_n) = 0 \}$$

$= V^\perp \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker} T' = V^\perp = \{0\}$

perché g non-deg.

$\Rightarrow T'$ iniettiva $\Rightarrow T'$ suriettiva

$\dim V = \dim \mathbb{R}^n$

$\Downarrow$

T suriettiva

$\Downarrow$

$\dim \operatorname{Im} T = k \Rightarrow \dim W^\perp = n-k$.

3) Se $g|_W$ non deg. allora $V = W \oplus W^\perp$

Tesi: $W \cap W^\perp = \{0\}$

Hp: $g|_W$ non deg. vuol dire che $\nexists\, w \in W,\ w \neq 0$ che sia ortogonale a tutti i vettori di W

Hp $\Rightarrow$ Tesi Se $w \in W \cap W^\perp$ allora $w \in W$

$w \in W^\perp \Rightarrow$ è ortogonale a tutti i vettori di W

$\Rightarrow w = 0$

Grassmann: $\dim(W+W^\perp) = \underset{\substack{\parallel \\ k}}{\dim W} + \underset{\substack{\geq \\ n-k \\ (1)}}{\dim W^\perp} - \underbrace{\dim W\cap W^\perp}_{0}$

$\geq k+n-k = n$

$\dim(W+W^\perp) \geq n \Rightarrow \boxed{W+W^\perp = V}$

$\underbrace{W+W^\perp}_{\geq n} \subseteq \underset{n}{V}$

$\Rightarrow \boxed{V = W\oplus W^\perp}$

4) g def + $\Rightarrow$ $W\oplus W^\perp = V$

$\Downarrow (\star)$

$g|_W$ def + $\overset{(3)}{\Rightarrow}$

$(\star)$: $g(v,v)>0 \;\; \underset{v\neq 0}{\forall v\in V} \Rightarrow g(v,v)>0 \;\; \underset{v\neq 0}{\forall v\in W}$

$\square$

Es: Capire TUTTI i passaggi

Es: 7.1 - 7.11 escluso 7.2 (SEGNATURA) NO

mercoledì