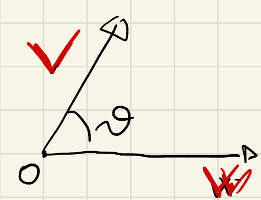
Prodotti scalari

$\mathbb{R}^2$

$$\langle v, w\rangle = v \cdot w = \boxed{\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\vartheta}$$

norma di v = lunghezza di v



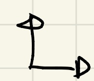
$$\langle v, v\rangle = \|v\|^2 \geq 0$$

$\langle v, w\rangle = 0 \iff \vartheta = \pi/2$ cioè quando sono ORTOGONALI

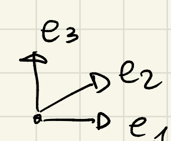
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono ortogonali



In $\mathbb{R}^3$ e_1, e_2, e_3 " " "



Def: Un PRODOTTO SCALARE è una applicazione su uno spazio vettoriale V

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$ tale che:

1) $g(v+v', w) = g(v,w) + g(v',w)$
2) $g(\lambda v, w) = \lambda g(v,w)$

} LINEARITÀ A SINISTRA

3) $g(v, w+w') = g(v,w) + g(v,w')$
4) $g(v, \lambda w) = \lambda g(v,w)$

} LINEARITÀ A DESTRA

5) $g(v,w) = g(w,v)$ SIMMETRIA

$\forall v, v', w, w' \in V$

Oss: 1) + 5) $\Rightarrow$ 3)

$$g(v, w+w') \underset{(5)}{=} g(w+w', v) \underset{(1)}{=} g(w,v) + g(w',v) \underset{(5)}{=}$$

(3) $\Rightarrow$

$= g(v, w) + g(v, w')$

Es: $2) + 5) \Rightarrow 4)$

Prop: $g(\mathbf{0}, v) = 0$

vettori di V

numero in $\mathbb{R}$

dim: $g(0, v) = g(0+0, v)$

$\overset{(1)}{=} g(0, v) + g(0, v)$

$\Rightarrow 0 = g(0, v)$

Esempio: Il PRODOTTO SCALARE EUCLIDEO su $\mathbb{R}^n$

è $g(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$= {}^t x \cdot y$

$= (x_1 \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\square \cdot \square = \square$

Esempio: S matrice simmetrica $n\times n$

g_S su $\mathbb{R}^n$

$x,y\in\mathbb{R}^n$ $\quad g_S(x,y) = {}^t x\, S\, y$

Se $S = I$

$g_I(x,y) = {}^t x\, I\, y$

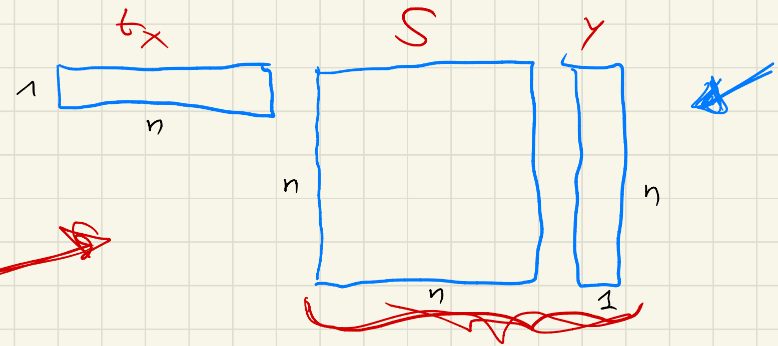
$= {}^t x \cdot y$

è quello euclideo

È un prodotto scalare:

$$g_S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

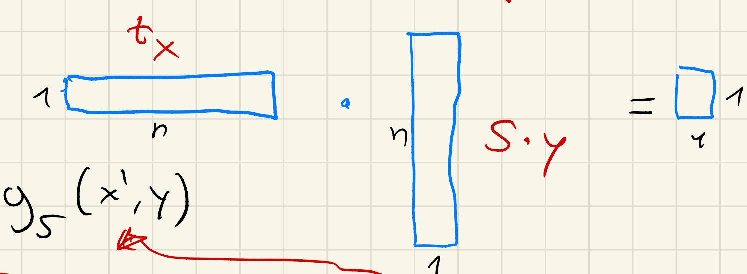
$$g_S(x,y) = \boxed{{}^t x \cdot S \cdot y}$$



Verifico gli assiomi:

1) 2) 5)

es



1) $\underbrace{g_S(x+x',y)}_{*} \overset{?}{=} g_S(x,y) + g_S(x',y)$

$$ {}^t(x+x')\cdot S\cdot y = ({}^tx+{}^tx')Sy = {}^txSy + {}^tx'Sy $$

DISTR.

5) $g_S(x,y) \overset{?}{=} g_S(y,x)$

$$ {}^txSy \qquad\qquad {}^tySx $$

DEVO USARE CHE

S è SIMMETRICA

$$ {}^txSy = {}^t({}^txSy) = {}^ty\,{}^tS\,{}^t({}^tx) $$

$$ {}^t(ABCD) = {}^tD\,{}^tC\,{}^tB\,{}^tA $$

$$ {}^tySx $$

$(g(0,0)=0)$

<u>Def</u>: Un prodotto scalare g su V è

BUONA → 1) DEFINITO POSITIVO se $g(v,v)>0\ \forall v\neq 0$

STRANA → 2) DEGENERE se $\exists v\in V$, $v\neq 0$ t.c. $g(v,w)=0\ \forall w\in V$

Esiste un vettore v ortogonale a qualsiasi w, $v\neq 0$

Def: Diciamo che v e w in V sono ORTOGONALI se $g(v,w)=0$

Prop: Se g è definito positivo, non è degenere

dim: $v \neq 0$ $\quad g(v,v)>0 \Rightarrow g(v,v) \neq 0 \Rightarrow$ v non è ortogonale a tutti $\square$

Es: Il prodotto scalare euclideo è definito positivo

Infatti $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ $\quad g(x,x) = {}^t x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$

se $x \neq 0 \rightarrow \exists i : x_i \neq 0$

Domanda: S simmetrica. g_S è def positivo? è degenere?

Es: $S = D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$ $\quad$ Se $d_i > 0$ $\forall i$, allora g_S è def. positivo svolgimento: $x \neq 0$

$$g_S(x,x) = {}^t x S x$$

Formula in generale: S matrice simmetrica qualsiasi, $x, y \in \mathbb{R}^n$ qualsiasi

$$g_S(x,y) = {}^t x \cdot S \cdot y = \boxed{\sum_{i,j=1}^{n} x_i S_{ij} y_j}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

Se $\underset{D}{\overset{\shortparallel}{S}}$ è diagonale $\quad g_D(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i D_{ij} y_j \qquad D_{ij} = 0$ se $i \neq j$

$$D_{ii} = d_i$$

$$g_D(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i d_i y_i$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

Es: Se $d_i > 0$ allora g_D è def $+$

$$g_D(x,x) = \sum_{i=1} d_i x_i^2 = d_1 x_1^2 + \dots + d_n x_n^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

POSITIVO POSITIVO

FORMA QUADRATICHE

Prendo S matrice simmetrica $n \times n$

Def: S definisce una FORMA QUADRATICA, un polinomio di II grado nelle variabili $x_1, \dots, x_n$

$$q(x) = {}^t x S x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i S_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^{n} S_{ij} x_i x_j$$

polinomio II grado omogeneo (solo monomi di II grado)

Es: In $\mathbb{R}^2$ $\quad q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = {}^t x S x$$

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} S_{ij} x_i x_j = 1x_1x_1 \underbrace{- 1 x_1x_2 - 1 x_2x_1}_{-2x_1x_2} + 3x_2^2$$

In $\mathbb{R}^3$ $\quad q(x) = x_1^2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_2x_3$

$$q(x) = {}^t x S x \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = {}^t x \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix} x$$

Oss: S simmetrica $\to g_S \qquad g_S(x,y) = {}^t x S y \in \mathbb{R}$

$\to q_S \qquad q_S(x,x) = {}^t x S x \in \mathbb{R}$

RADICALE

Def: Sia g un prodotto scalare su V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

DEFINITO POSITIVO SU $\mathbb{C}$ NON HA SENSO $\to$ no $\mathbb{C}$

Il RADICALE di g è l'insieme $V^\perp \subseteq V$ formato dai vettori che sono ortogonali a tutto V, cioè:

$$V^\perp = \{ v \in V \mid \underbrace{g(v,w) = 0 \ \forall w \in V}_{v \text{ è ortogonale a } w \ \forall w \in V} \}$$

<u>Prop</u>: S matrice simmetrica $\rightsquigarrow$ g_S prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$

Il radicale di g_S è $\operatorname{Ker} S$

<u>Oss</u>: Effettivamente, se $v \in \operatorname{Ker} S$, allora

$$g_S(v,w) = g_S(w,v) = {}^t w \underbrace{S\, v}_{0} = {}^t w \cdot 0 = 0$$

Quindi $\operatorname{Ker} S \subseteq V^\perp$ Andrebbe visto anche $\operatorname{Ker} S \supseteq V^\perp$

<u>Prop</u>: $V^\perp \subseteq V$ è sempre un sottospazio vettoriale di V

dim: 1) $0 \in V^\perp$

2) se $v, v' \in V^\perp$ allora $v+v' \in V^\perp$

3) se $v \in V^\perp$ allora $\lambda v \in V^\perp$ $\forall \lambda$

Oss:

g_S è degenere $\iff V^\perp \neq \{0\}$

g è degenere se $\exists\, v \neq 0$ ortogonale a tutti

$V^\perp = \{v \neq 0$ ort. a tutti$\}$

1) $g(0, v) = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow 0 \in V^\perp$

2) $v, v' \in V^\perp \quad g(v, w) = 0 \ \forall w$

$g(v', w) = 0$

$$g(v+v', w) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{g(v, w)} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{g(v', w)} = 0 + 0 = 0 \quad \forall w \in V$$

3) es

Def: V spazio vettoriale con prodotto scalare g

Un vettore $v \in V$ è ISOTROPO se $g(v, v) = 0$

Oss: I vettori che stanno in $V^\perp$ sono tutti isotropi

se $v \in V^\perp$ $\quad g(v,w)=0 \;\; \forall w \in V \Rightarrow g(v,v)=0$

g prod. scalare

DEF + se $g(v,v)>0 \;\; \forall v \neq 0$

DEGENERE se $\exists\, v \neq 0 : g(v,w)=0 \;\; \forall w \in V$

($\Leftrightarrow V^\perp$ non è banale)

per g_S su $\mathbb{R}^n$

$V^\perp = \ker g_S$

v è ISOTROPO se $g(v,v)=0$

TUTTI I VETTORI IN $V^\perp$ SONO ISOTROPI

Ci possono essere vettori isotropi anche fuori da $V^\perp$:

$\mathbb{R}^2 \quad g_S \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\det S \neq 0$

non è degenere

Oss: g_S è degenere $\Leftrightarrow \det S = 0$

infatti $V^\perp = \ker S$

$V^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \ker S = \{0\} \Leftrightarrow \det S \neq 0$

Troviamo i vettori isotropi di g_S:

Cerco $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ t.c. $g_S(v,v)=0$

$$\underset{v}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \qquad g_S(v,v) = \boxed{\underbrace{(x\ \ y)}_{{}^t v} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{v}} = \underline{x^2 - y^2} = 0$$

$$\boxed{g_S(v,w) = {}^t v\, S\, w}$$

$$g_D(x,x) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

$$\text{Isotropi} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2 - y^2 = 0 \right\} =$$ unione di due rette

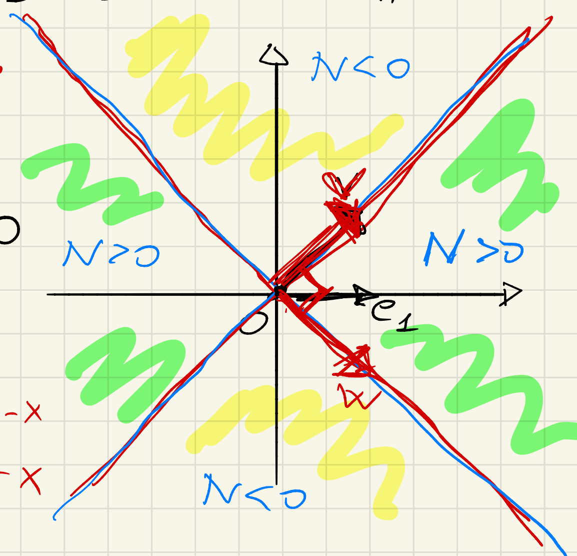
$$x^2 - y^2 = \underbrace{(x+y)}_{=0} \text{ oppure } \underbrace{(x-y)}_{=0} = 0$$

$x+y=0 \qquad y=-x$

$x-y=0 \qquad y=x$

$g(x,x) = x^2 - y^2 = N$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ isotropo



$g(v,v)=0$ però v non è ortogonale a tutti

$$g(v,e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$