Lezione 21

Quadrica: $Q = \{p(x) = 0\}$

simmetrica

$$p(x) = {}^t x A x + 2 {}^t b x + c = {}^t \bar{x} \bar{A} \bar{x} \qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right) \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

ortogonale

Cambio coordinate: $x = Mx' + P \qquad \bar{M} = \begin{pmatrix} M & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \bar{M}\bar{x}'$

invertibile

$$\bar{A}' = {}^t \bar{M} \bar{A} \bar{M}$$

cioè: $\begin{cases} A' = {}^t M A M \\ b' = {}^t M (AP + b) \\ c' = {}^t P A P + 2 {}^t b P + c \end{cases}$

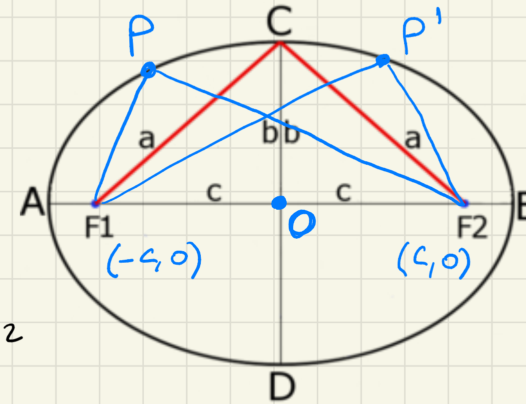
1) Con il Teo spettrale e $x = Mx'$ otteniamo A diagonale

2) Se $\exists$ centro P t.c. $AP + b = 0$, con $x = x' + P$ otteniamo $b = 0$

Coniche:

F1 e F2 sono i FUOCHI, a distanza $2c$

ELLISSE



$a > c$ è il SEMIASSE

$$E = \left\{ P \;\middle|\; \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \right\}$$

Prop: $E = \left\{ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ con $b^2 = a^2 - c^2$

dim:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$2x^2 + 2c^2 + 2y^2 - 4a^2 = -2\sqrt{\left((x+c)^2 + y^2\right)\left((x-c)^2 + y^2\right)}$$

$$\left(x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2\right)^2 = \left((x+c)^2 + y^2\right)\left((x-c)^2 + y^2\right)$$

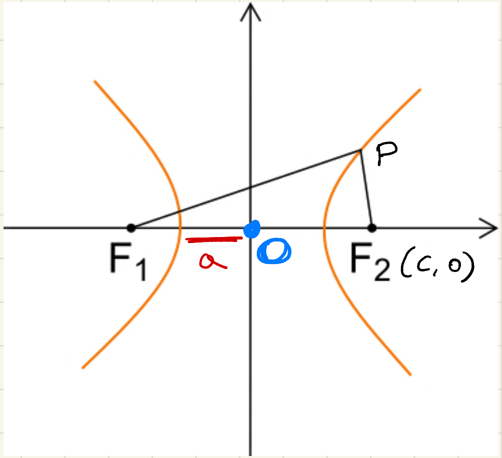
$$\ldots \Rightarrow \underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2} x^2 + a^2 y^2 = a^2 \underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2}$$

$$\boxed{E = \left\{ \begin{pmatrix} a\cos\vartheta \\ b\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{pmatrix} \;\middle|\; \vartheta \in [0, 2\pi) \right\}}$$

IPERBOLE

F_1 e F_2 sono i **FUOCHI**, a distanza $2c$

$a<c$ è il **SEMIASSE**



$$I = \{P \mid |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a\}$$

Prop: $I = \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$

con $b^2 = c^2 - a^2$

dim: come sopra.

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} \pm a \cosh \vartheta \\ b \operatorname{senh} \vartheta \end{pmatrix} \middle| \vartheta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ASINTOTI

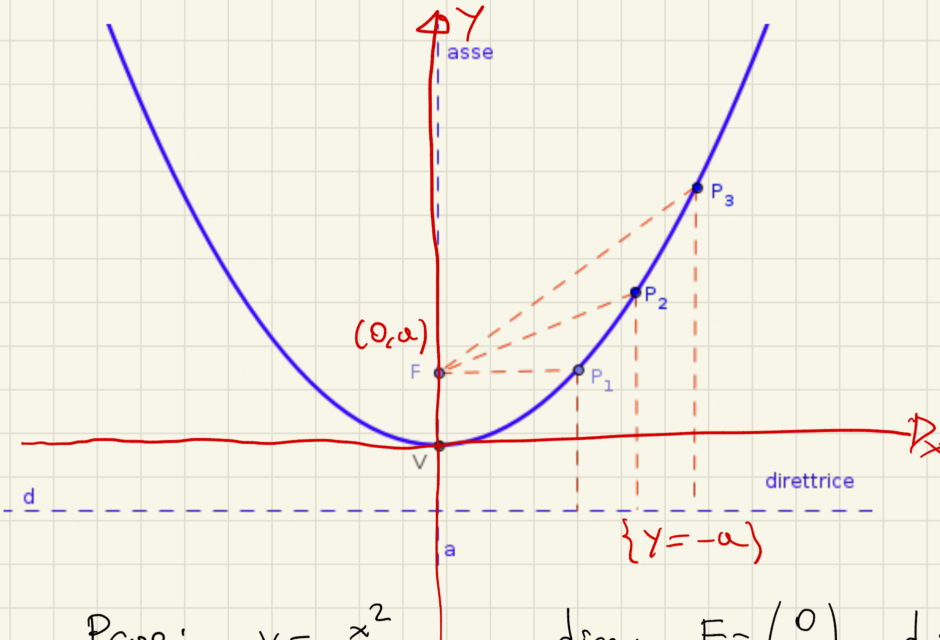
$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

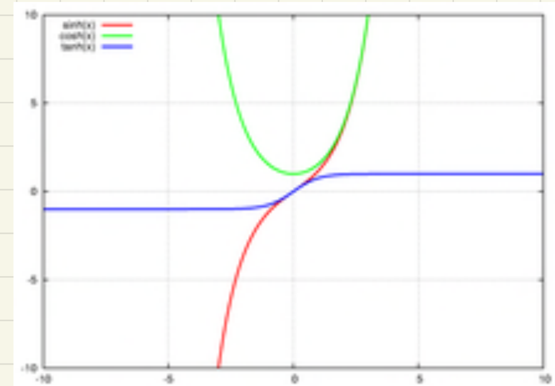
$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$D \operatorname{senh}(x) = \cosh(x)$ $\quad D \cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$

PARABOLA

F è il FUOCO e d la DIRETTRICE





$$P = \{ Q \mid d(F,Q) = d(d,Q) \}$$

$$2a = d(d,F)$$

Prop: $y = \dfrac{x^2}{4a}$

dim: $F = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$, $d = \{ y = -a \}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\sqrt{x^2 + (y-a)^2} = |y+a| \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4ay = 0$$

$^t\bar{x}(\lambda\bar{A})\bar{x} = \lambda\, {}^t\bar{x}\bar{A}\bar{x}$

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE

Oss: Se cambiamo $\bar{A}$ con $-\bar{A}$, $Q = \{{}^t\bar{x}\bar{A}\bar{x} = 0\}$ è la stessa

Esercizio: La segnatura cambia da (i_+, i_-, i_0) a (i_-, i_+, i_0)

Se $\bar{A}$ definisce una conica non degenere, le possibili segnature sono:

$(3,0,0)$, DEF +

$(2,1,0)$, INDEF

$(1,2,0)$, INDEF

$(0,3,0)$ DEF −

Teo: Se $C = \{{}^t\bar{x}\bar{A}\bar{x} = 0\}$ è una conica non degenere:

(1) Se $\bar{A}$ è definita, $C = \emptyset$ Es: $x^2+y^2+1=0$ $\bar{A} = I$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}$$

(2) Se $\bar{A}$ indefinita:

- $\to$ C è IPERBOLE se $\det A < 0$
- $\to$ C è PARABOLA se $\det A = 0$
- $\to$ C è ELLISSE se $\det A > 0$

dim: Teo spettrale $\Rightarrow$ A diagonale

Se $\det A \neq 0$, allora $AP + b = 0$ ha soluzione $P = -A^{-1}b$

$\Rightarrow \exists$ centro P. Sposto l'origine in P e ottengo $b = 0$.

Oss: Se $x = Mx' + P$

$\bar{A}' = {}^t\bar{M}\bar{A}\bar{M}$

La segnatura di $\bar{A}$ è sempre la stessa!

$A' = {}^tMAM$

il segno di $\det A$ è sempre lo stesso!

Adesso $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ cioè $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$

Se a_{11}, a_{22}, a_{33} hanno stesso segno $\Rightarrow C = \emptyset$
(CASO DEFINITO)

Se hanno segni misti:

Se a_{11} & a_{22} stesso segno $\to$ ellisse $\underbrace{-\frac{a_{11}}{a_{33}}}_{>0} x^2 \underbrace{-\frac{a_{22}}{a_{33}}}_{>0} y^2 = 1$

Se " " hanno segno diverso $\to$ iperbole

Se $\det A = 0$

A meno di scambiare x e y $\quad a_{11} \neq 0 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (non può essere $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) perché $\bar{A}$ è non degenere

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \qquad \det \bar{A} = -a_{11} b_2^2 \neq 0 \Rightarrow a_{11} \neq 0,\ b_2 \neq 0$$

Ottengo $\quad a_{11} x^2 - 2b_1 x - 2b_2 y + c = 0$

$a \neq 0 \quad ax^2 + bx + c' = y$

<u>Es</u>: Traslando l'origine si ottiene $y = kx^2$ per qualche $k \neq 0$

$\Rightarrow$ PARABOLA

$\square$

Teo: Se $C = \{ {}^t\bar{x}\bar{A}\bar{x} = 0 \}$ è una conica degenere:

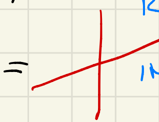
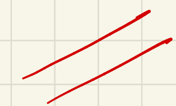
le segnature possibili sono $(2,0,1)$, $(1,1,1)$, $(0,2,1)$ $\quad rk\bar{A}=2$

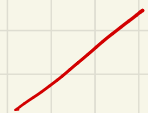
SEMIDEF + $\quad$ INDEF $\quad$ SEMIDEF -

$(1,0,2)$, $(0,1,2)$ $\quad rk\bar{A}=1$

Otteniamo:

1) Se $rk\bar{A} = 2$ e $\bar{A}$ semidef
   - $\det A \neq 0 \to C = \bullet$ PUNTO
     Es: $x^2+y^2=0$
   - $\det A = 0 \to C = \emptyset$

2) " " " " indef
   - $\det A \neq 0 \to C =$  RETTE INCIDENTI
     Es: $(x+y-3)(x-5)$
   - $\det A = 0 \to C =$  RETTE PARALLELE
     Es: $(x+y-3)(x+y+8)$

3) Se $rk\bar{A} = 1$ allora $C =$ 

RETTA DOPPIA

Es: $(x+3y-5)^2$

Es: $C_t = \{(2t-1)x^2 + 6txy + ty^2 + 2x = 0\}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

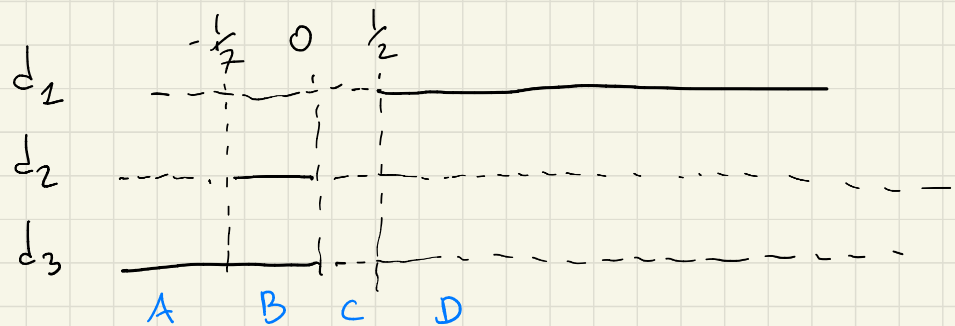
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2t-1 & 3t & 1 \\ 3t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 2t-1$ $\qquad d_3 = -t = \det \bar{A}$

$d_2 = t(2t-1) - 9t^2 = -7t^2 - t$

$= -t(7t+1) = \det A$

Se $t \neq \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{7}$:



	1	d_1	d_2	d_3
A	+	−	−	+
B	+	−	+	+
C	+	−	−	−
D	+	+	−	−

sempre indefinita

$\Downarrow$

$C \neq \emptyset$

$\forall t$

C è degenere solo per $t = 0$

Se $t = \frac{1}{2}$: $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ indefinita perché ci sono 0 sulla diagonale $\Rightarrow$ vettori isotropi

Più velocemente : Se $t \neq 0$ $\bar{A}$ non degenere.

0 sulla diagonale $\Rightarrow$ indefinita $\Rightarrow C \neq \emptyset$

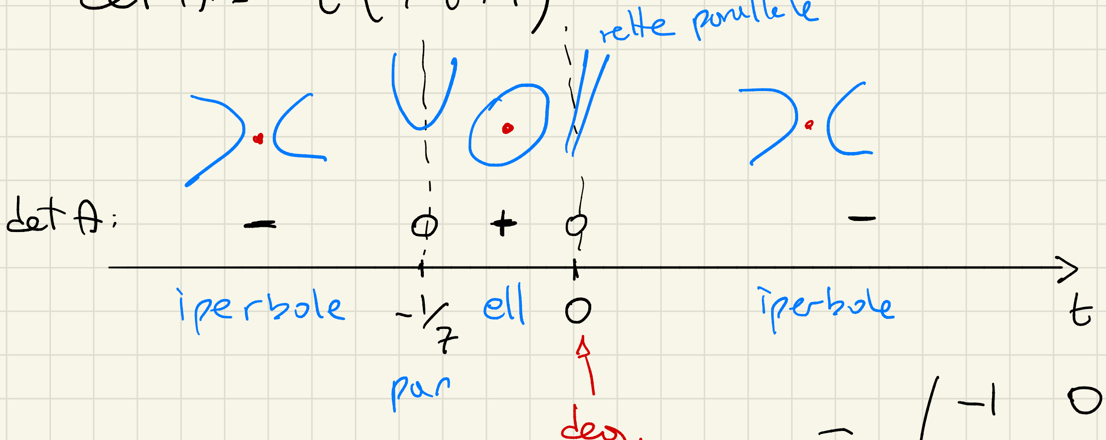
$\langle v, v \rangle < 0 \quad \forall v \neq 0$

$\Downarrow$

$\langle v, v \rangle \neq 0$ no isotropi

det < 0 $\Rightarrow$ no isotropi

$\det A = -t(7t+1)$



$t = 0$?

$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

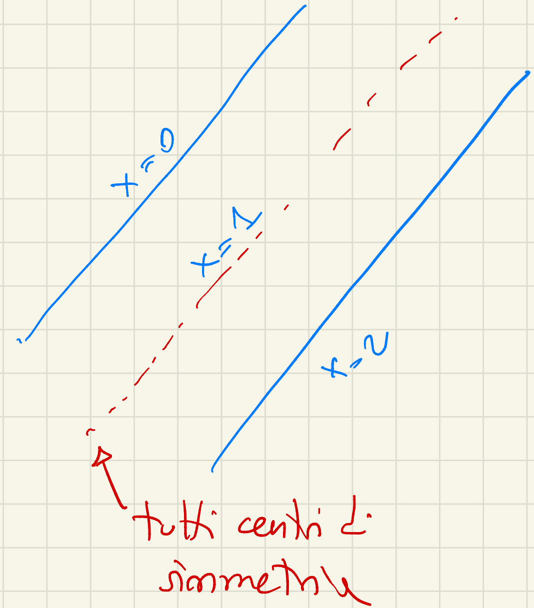
$x(-x+2) = 0$

$-x^2 + 2x = 0$

Trova il centro di C quando esiste:

$AP + b = 0$ Se A invertibile $P = -A^{-1} \cdot b$

(fate i conti per esercizio)

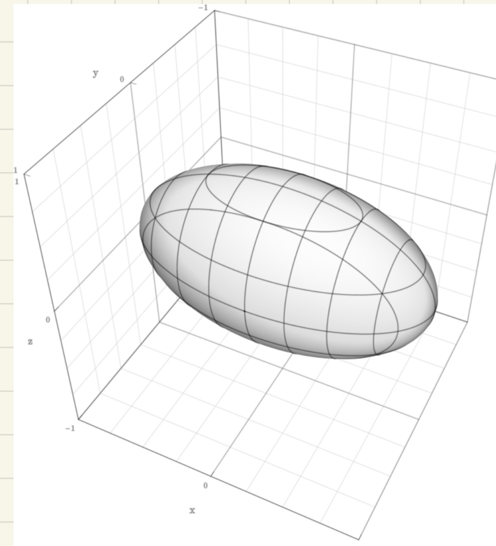


QUADRICHE in $\mathbb{R}^3$

ELLISSOIDE

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\begin{cases} x = a\cos\vartheta\cos\varphi \\ y = b\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = c\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$$



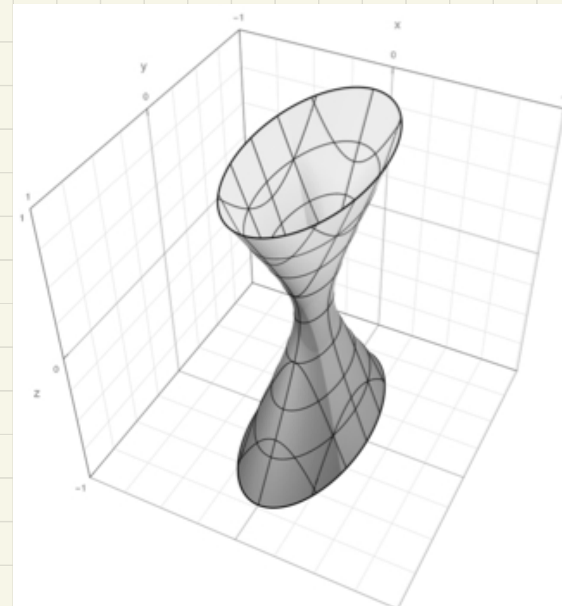
IPERBOLOIDE A UNA FALDA

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

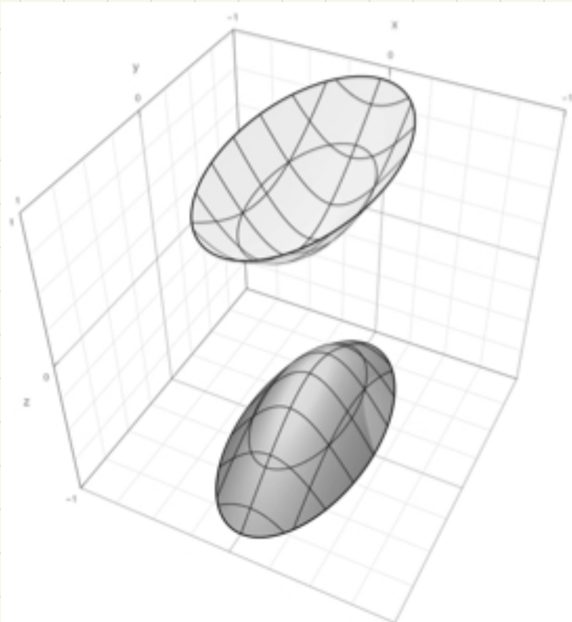
è una

SUPERFICIE

RIGATA

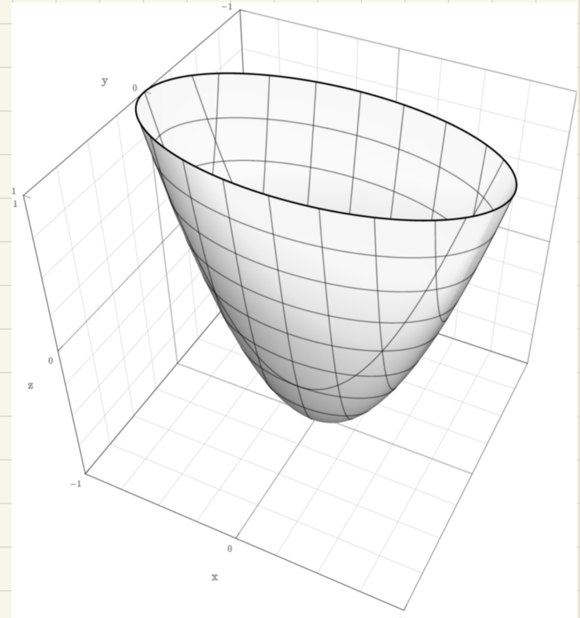


IPERBOLOIDE A DUE FALDE



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

PARABOLOIDE ELLITTICO

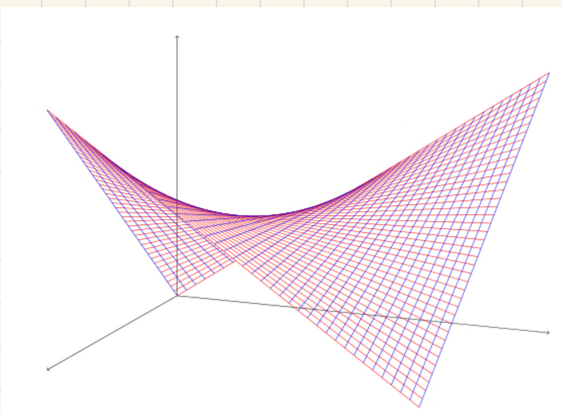


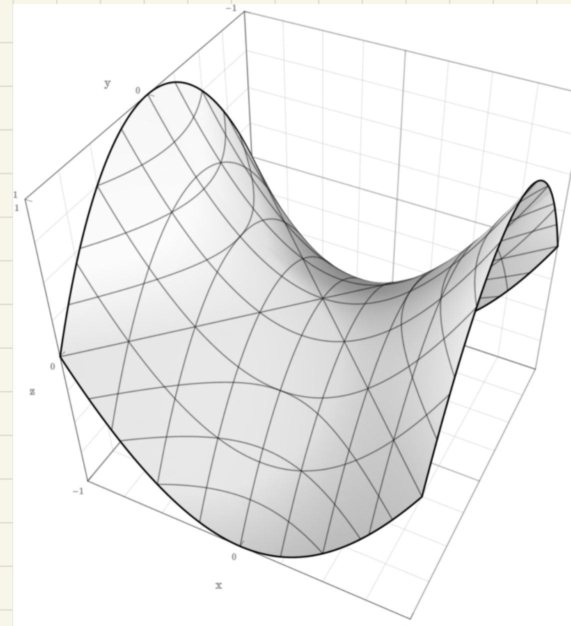
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

PARABOLOIDE IPERBOLICO

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

È una SUPERFICIE RIGATA

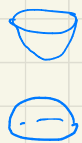
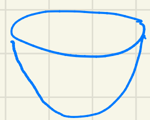




CLASSIFICAZIONE

Quadriche non degeneri:

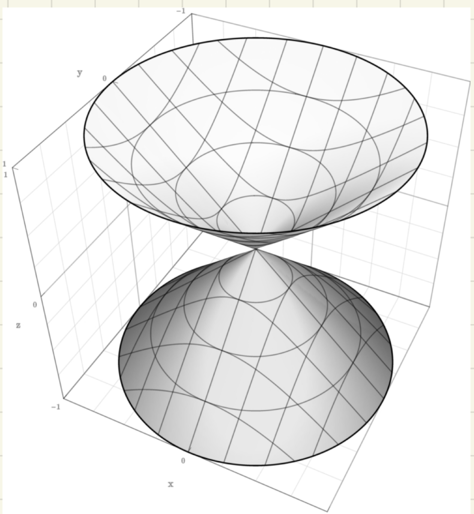
$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right)$$

$\det \bar{A} < 0$			$\det \bar{A} > 0$	
$\det A \neq 0$ definita	$\det A \neq 0$ indef.	$\det A = 0$	$\det A \neq 0$	$\det A = 0$
ELLISSOIDE 	IPERBOL. 2 FALDE 	PARAB. ELLIT. 	IPERBOL. 1 FALDA 	PARABOL. IPERBOLICO 

Alcune quadriche degeneri:

CONO

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



CILINDRO

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$