Lezione 2

Matrici di Jordan

$$B_{\lambda,n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{n} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} \lambda \\ \\ \\ \lambda \end{pmatrix}}\right\} n$$

$m_a(\lambda) = n$

$m_g(\lambda) = 1$

BLOCCO DI JORDAN

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{B} & & & 0 \\ & \boxed{B} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

blocchi di Jordan

MATRICE DI JORDAN

Es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & i & 1 & & \\ & & & & 0 & i & & \\ & & & & & & i & 1 \\ & & & & & & 0 & i \end{pmatrix} = J$$

Teo (FORMA DI JORDAN) VERO SOLO SU $\mathbb{C}$

Ogni matrice quadrata A ($n \times n$) a coefficienti in $\mathbb{C}$ è simile ad una matrice di Jordan J

La matrice di Jordan J è unica a meno di permutare i blocchi:

$$J \sim J' = \begin{pmatrix} \boxed{2} & & & & & & & \\ & i & 1 & & & & & \\ & & i & & & & & \\ & & & i & 1 & & & \\ & & & & i & & & \\ & & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

non sono simili

Esempio:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{m_g(2)=3}}_{1} \quad \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{m_g(2)=2}}_{2} \quad \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{m_g(2)=1}}_{3} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{?} = A$$

Quali sono simili?

Matrice diagonale è matrice di Jordan con blocchi di taglia 1

A ha autovalore 2 $\quad m_a(2)=3$

(A) $m_g(2) = 3 - rk(A-2I) = 3 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$

Quali sono le possibili matrici di Jordan per A? (1), (2), (3)

(2) $m_g(2) = 3 - rk(A-2I) = 3 - rk\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{0} \end{pmatrix} = 3-1 = 2$

Risposta: $A \sim$ (3)

Oss: $A \sim B$ simili $\Rightarrow$ $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$, $\det A = \det B$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$,

stessi autovalori, con stesse molteplicità algebriche e geometriche

ANDREBBE DIMOSTRATO

$A = M^{-1} B M$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \det(M^{-1}BM - \lambda I)$$
$$= \det(M^{-1}BM - M^{-1}(\lambda I)M)$$
$$= \det(M^{-1}(B - \lambda I)M)$$

$\det A = \det(M^{-1}BM)$

$= \cancel{\det M^{-1}} \det B \cancel{\det M}$

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}\left((M^{-1})(BM)\right) = \det \cancel{M^{-1}} \det(B-\lambda I) \det \cancel{M}$$

$$= \operatorname{tr}\left((BM)(M^{-1})\right) \qquad = \det(B-\lambda I) = p_B(\lambda)$$

$$= \operatorname{tr}(BMM^{-1}) = \operatorname{tr} B$$

$$\operatorname{tr}(AB) \neq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$$

$$\boxed{\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$$

Attenzione:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non sono simili perché hanno blocchi di Jordan differenti

Hanno stesso $p(\lambda) = (\lambda - 1)^4$ $\quad m_a(1) = 4$

$m_g(1) = 2$ per entrambe

Matrici nilpotenti: Una matrice A quadrata $n \times n$ è NILPOTENTE se $A^k = 0$ per qualche $k \geq 0$ intero

Il più piccolo k per cui $A^k = 0$ è l'INDICE DI NILPOTENZA di A

Esempi:

$$\boxed{B_{0,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}$$ è nilpotente con indice n

$B_{0,1} = (0)$ è già nulla, quindi nilpotente con indice 1

$B_{0,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (B_{0,2})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è nilp. con indice 2

$B_{0,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (B_{0,3})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (B_{0,3})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è nilp. con indice 3

$B_{0,5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (B_{0,5})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (B_{0,5})^5 = 0$

Esempi: $A \sim B$ Se A nilpotente, allora B è nilpotente con lo stesso indice

$B = M^{-1} A M$ $\qquad$ Se $A^k = 0$

allora $B^k = (M^{-1} A M)^k = M^{-1} \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{A^k} M = 0$

Qualsiasi matrice simile a una $B_{0,n}$ è nilpotente

<u>Esempio</u>: $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ $\quad \underset{\substack{\parallel \\ -a^2 - bc}}{\det A} = 0$ $\qquad$ è nilpotente

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a^2 + bc} & 0 \\ 0 & \underline{bc + a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Ex</u>: Le matrici nilpotenti 2×2 sono tutte di questo tipo.

$\mathbb{C}$

<u>Ex</u>: Matrice $\underline{A}$ nilpotente $\Longleftrightarrow$ Ha solo autovalore zero.

<u>dim</u>: Sia J forma di Jordan di A.

$A \sim J \Rightarrow A$ nilp. $\Longleftrightarrow J$ nilp.

Posso dimostrare il teorema per J invece che per A

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_k} \end{pmatrix} \qquad J^k = \begin{pmatrix} \boxed{B_1^k} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{B_k^k} \end{pmatrix}$$ può fare zero?

Quando è possibile che $J^k = 0$? Solo se c'è solo l'autovalore zero

$B_{\lambda,n}^k$ può essere nullo solo se $\lambda = 0$

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \qquad T^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se T è nilpotente, allora $a_1 = \dots = a_n = 0$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad J^2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & \star \\ & 1 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

J nilpotente $\Leftrightarrow$ ha solo autovalore zero

MOLT. GEOM. GENERALIZZATE

A matrice $n \times n$ su $\mathbb{C}$

λ autovalore per A $\qquad m_a(\lambda) \qquad m_g(\lambda)$

$$m_g(\lambda)^1 = m_g(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$$

$$m_g(\lambda)^2 = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2$$

$$\vdots$$

$$m_g(\lambda)^i = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^i$$

Vengono $\underline{m_g(\lambda)^1} \leq m_g(\lambda)^2 \leq \dots \leq m_g\underline{(\lambda)^i} = m_a(\lambda)$

Teo: $A \sim B \Leftrightarrow$ hanno stessi autovalori & stesse molteplicità geometriche generalizzate

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = B$$

non sono simili

$m_a(1) = 4$ per entrambe

$$m_g^A(1) = 4 - \underline{rk(A-I)} = 4 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4-2 = 2$$

$$2$$

$$m_g^B(1) = 4 - \underline{rk(B-I)} = 4 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = 4-2 = 2$$

$$m_g^A(1)^2 = \dim Ker(A-I)^2$$

$$= 4 - \underline{rk(A-I)^2} = 4 - rk\begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$4 - 1 = 3$$

$$m_g^B(1)^2 = \dim Ker(B-I)^2 = 4 - \underline{rk(B-I)^2} = 4 - rk\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_g^B(1)^3 = \dim \operatorname{Ker}(B-I)^3 = 4 - rk(B-I)^3 = 4 - 0 = 4$$

Oss: La $m_g(\lambda)$ è il numero di blocchi con autovalore λ nella forma di Jordan

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & \\ & & 3 & & & & \\ & & & 3 & 1 & & \\ & & & & 3 & & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}}_{7}$$

$$m_g(3) = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

rango: # colonne blu

$m_g(3)$ = dim ker = # " rosse = # blocchi

Ogni blocco ha 1 colonna rossa

Oss: J Jordan è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ è diagonale

Ricevimento: Lun. 16-18 su Microsoft Teams

Es: Trova matrice di Jordan per $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -4 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 \left((-\lambda)(4-\lambda) + 4 \right) = (2-\lambda)^2 \left(\lambda^2 - 4\lambda + 4 \right)$$

$$= (2-\lambda)^4 \qquad m_a(2) = 4$$

$$m_g(2) = 4 - rk(A - 2I) = 4 - rk \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Possibili forme di Jordan 4×4 con autovalore solo 2

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & & & \\ & \boxed{2} & & \\ & & \boxed{2} & \\ & & & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & \boxed{2} & \\ & & & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}}_{B} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & \boxed{2} \end{pmatrix}}_{C} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

m_g: 4 3 2 2 1

m_g^2: . . 4 3 .

$$m_g(2)^2 = \dim \operatorname{Ker}(A-2I)^2 = 4 - \operatorname{rk}(A-2I)^2 = 4-1 = 3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_g^B(2)^2 = \dim \operatorname{Ker}(B-2I)^2 = 4 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 4 - 0 = 4$$

$$m_g^C(2)^2 = \dim \operatorname{Ker}(C-2I)^2 = 4 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= 4 - rk\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 \quad \star$$

Risposta: $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Formula: $m_g(\lambda)^1 \le m_g(\lambda)^2 \le \dots$

$m_g(\lambda)^i - m_g(\lambda)^{i-1} =$ numero di blocchi di taglia $\geq i$

$\overset{2}{m_g(\lambda)^1} = \#$ blocchi $\quad 2$

$\underset{\,\,1}{3-2} \quad \underset{3}{m_g(\lambda)^2} - \underset{2}{m_g(\lambda)^1} = \#$ blocchi di taglia ≥ 2

6.1

Esercizio 6.1 & 6.10