TEOREMA SPETTRALE

PRODOTTI HERMITIANI

V sp. vettoriale su $\mathbb{C}$

Def: Un PRODOTTO HERMITIANO su V è una funzione

$$V \times V \to \mathbb{C}$$

$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

che soddisfa questi assiomi:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \langle v+v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle \\
&2)\ \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \\
&5)\ \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \leftarrow \text{coniugio}
\end{aligned}\right\} \forall v, v', w \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Conseguenze:

3) $\langle v, w+w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$ $\qquad \overline{\overline{z}} = z$

4) $\langle v, \lambda w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$ $\qquad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

1) + 5) $\Rightarrow$ 3) esercizio $\qquad z = a+bi \Rightarrow z = a-bi$

2) + 5) $\Rightarrow$ 4) $\qquad z = \rho e^{i\vartheta} \Rightarrow z = \rho e^{-i\vartheta}$

$$\langle v, \lambda w \rangle \underset{(5)}{=} \overline{\langle \lambda w, v \rangle} \underset{(2)}{=} \overline{\lambda \langle w, v \rangle} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\langle w, v \rangle}$$

$$\underset{(5)}{=} \overline{\lambda}\, \overline{\overline{\langle v, w \rangle}} = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$$

Conseguenza: $\qquad z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

6) $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$

Infatti: $\langle v, v \rangle \underset{(5)}{=} \overline{\langle v, v \rangle} \Leftrightarrow \langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$

Def: Un prodotto hermitiano è DEFINITO POSITIVO se

$$\langle v,v\rangle > 0 \quad \forall v \in V,\ v \neq 0$$

Esempio: Il PRODOTTO HERMITIANO EUCLIDEO su $\mathbb{C}^n$ $(V = \mathbb{C}^n)$

$$x, y \in \mathbb{C}^n \qquad \langle x,y\rangle = {}^t x \cdot \overline{y}$$

$${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \overline{y} := \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

$$y_i \in \mathbb{C}$$

Es: Dimostra che è un prodotto Hermitiano

$$(5): \quad \langle x,y\rangle = {}^t x \cdot \overline{y} = {}^t({}^t x \cdot \overline{y})$$

$$= {}^t\overline{y} \cdot x = {}^t\overline{y} \cdot \overline{\overline{x}} = \overline{{}^t y \cdot \overline{x}} = \overline{\langle y,x\rangle}$$

In generale A $m\times n$ $\Rightarrow$ $\overline{A}$ $m \times n$ con

$$(\overline{A})_{ij} = \overline{A_{ij}}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 1-i \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2 & 1+i \end{pmatrix}$

È definito positivo: $\quad x \in \mathbb{C}^n$

$$\langle x, x\rangle = {}^t x \cdot \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \cdot \bar{x}_1 + x_2 \cdot \bar{x}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{x}_n$$

$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 > 0 \qquad z \cdot \bar{z} = \|z\|^2$$

se $x \neq 0$

$$\left.\begin{matrix} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{matrix}\right\} \Rightarrow z\bar{z} = a^2 + b^2 = \|z\|^2$$

Esempi più generali:

$$\left.\begin{matrix} z = \rho e^{i\vartheta} \\ \bar{z} = \rho e^{-i\vartheta} \end{matrix}\right\} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \rho^2 = \|z\|^2$$

<u>Def</u>: Una matrice $n \times n$ complessa H è HERMITIANA se ${}^t H = \bar{H}$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \qquad {}^t H = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = \bar{H}$$

<u>Oss</u>: Se H è Hermitiana, $g_H(x, y) = {}^t x \cdot H \cdot \bar{y}$ è un prodotto Hermitiano su $\mathbb{C}^n$

<u>Es</u>:

1) $^t(x+x')H\bar{y} = {}^t x H \bar{y} + {}^t x' H \bar{y}$

$\langle x+x', y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x', y\rangle$

2) $^t(\lambda x) H \bar{y} = \lambda\, {}^t x H \bar{y}$

$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$

5) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$?

$$\overset{\langle x,y\rangle}{\parallel}$$

$${}^t x H \bar{y} = {}^t({}^t x H \bar{y}) = {}^t\bar{y}\,{}^t H x \overset{H \text{ Hermitiana}}{=} {}^t\bar{y}\,\bar{H} x = \overline{{}^t y H \bar{x}} = \overline{\langle y,x\rangle}$$

- Se H è reale, H Hermitiana $\iff$ H simmetrica
- I numeri H_{ii} sulla diagonale devono essere reali

Con i prodotti Hermitiani definiti positivi è possibile fare quelle cose che si fanno con i prodotti scalari definiti positivi allo stesso modo: SOTTOSPAZIO ORTOGONALE, BASE ORTONORMALE, GRAM-SCHMIDT, NORMA, DISTANZA FRA PUNTI

$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$

$v_1, \dots, v_n$ se $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$

ENDOMORFISMI AUTOAGGIUNTI

D'ora in poi V è

- spazio vettoriale complesso con prod. Hermitiano definito positivo,

oppure:

- spazio vettoriale reale con prod. scalare definito positivo

Def: $T : V \to V$ endomorfismo è AUTOAGGIUNTO se

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle \qquad \forall v, w \in V$$

Oss: T isometria vettoriale se $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \qquad \forall v, w \in V$

Prop: Se $\mathcal{B}$ base ortonormale di V, allora

T autoaggiunto $\iff$ $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è Hermitiana

caso reale: ${}^tH = H$

${}^tH = \overline{H}$

(Ricordiamo: nel caso reale T isometria $\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è ortogonale)

complesso

$${}^tA \cdot A = I$$

$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è unitaria

$${}^tA \cdot \overline{A} = I$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $H = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ Hermitiana $\Rightarrow T$ autoagg

T autoagg. $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$ è vero $\forall v, w$

$\Leftrightarrow$ è vero $\forall v_1, \dots, v_n$ elementi di $\mathcal{B}$

$$\Updownarrow$$

$$\langle T(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, T(v_j) \rangle \quad \forall i, j$$

Tesi: $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$

$\mathcal{B}$ ortonormale

$$\langle T(v), w \rangle = {}^t[T(v)]_{\mathcal{B}}\, I\, \overline{[w]_{\mathcal{B}}} = {}^t\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}\right) \cdot \overline{[w]_{\mathcal{B}}}$$

$$= {}^t(H[v]_{\mathcal{B}}) \cdot \overline{[w]_{\mathcal{B}}} = {}^t[v]_{\mathcal{B}}\, {}^tH\, \overline{[w]_{\mathcal{B}}} = {}^t[v]_{\mathcal{B}}\, \overline{H}\, \overline{[w]_{\mathcal{B}}}$$

MATRICE ASSOCIATA

$$= {}^t[v]_B \cdot \overline{H \cdot [w]_B}$$
$$= {}^t[v] \cdot \overline{[T(w)]_B}$$
$$= \langle v, T(w) \rangle$$

V con prodotto Hermitiano

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base

Def: La MATRICE ASSOCIATA al prodotto Hermitiano

$$H_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Oss: 5) $\Rightarrow$ H è Hermitiana

$${}^tH = \overline{H} \iff H_{ji} = \overline{H_{ij}} \quad \forall i,j$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \overline{\langle v_j, v_i \rangle}$$

In generale,

$$\boxed{\langle v, w \rangle = {}^t[v]_B \cdot H \cdot \overline{[w]}}$$

Prop: $T: V \to V$ autoaggiunto oppure isometria

Se $U \subseteq V$ è T-invariante, allora $U^\perp$ è T-invariante

$$T(U) \subseteq U \Rightarrow T(U^\perp) \subseteq U^\perp$$

dim:

Tesi: $T(U^\perp) \subseteq U^\perp$

$$v \in U^\perp \overset{?}{\Rightarrow} T(v) \in U^\perp$$

Tesi: $\langle T(v), u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$

$$\langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle = 0 \qquad T(u) \in U, \quad v \in U^\perp$$

OK.

Teorema spettrale : (come prima V è sp. vett. compl. con p. h. def +
oppure " " reale " p. sc. ")

$T: V \to V$ è autoaggiunto $\iff$ ha una base ortonormale di autovettori e tutti gli autovalori sono reali

dim: $\boxed{\Leftarrow}$ T ha $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormale di autovettori.

$H = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è diagonale con numeri reali sulla diagonale

$\Rightarrow$ H è Hermitiana

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

simmetrica a coeff reali $\Rightarrow$ Hermitiana

$\Rightarrow$ T autoaggiunta

$\boxed{\Rightarrow}$ Solo nel caso complesso:

$T: V \to V$ aggiunto

Gli autovalori di T sono reali:

$$T(v) = \lambda v \qquad \langle T(v), v\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle$$

$$\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle \qquad\qquad \bar{\lambda}\langle v,v\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \cancel{\langle v,v\rangle} = \bar{\lambda}\cancel{\langle v,v\rangle} \qquad \langle v,v\rangle \neq 0,\ > 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Dimostro che $\exists\ \mathcal{B}$ base ortonormale di autovettori

per induzione su $n = \dim V$

<u>$n=1$</u>: $\mathcal{B} = \{v\}$ $\quad v \neq 0 \qquad v' = \dfrac{v}{\|v\|} \Rightarrow \|v'\| = 1 \qquad \mathcal{B}' = \{v'\}$ <u>ok</u>

<u>$n-1 \Rightarrow n$</u>: $\mathbb{C} \Rightarrow \exists$ autovettore $v \in V$, $\|v\| = 1$

$U = \mathrm{Span}(v)$, $U^\perp$ $\qquad \underset{n}{V} = \underset{1}{U} \oplus \underset{n-1}{U^\perp}$ perché V def +

U è T-invariante $\underset{(\text{Prop})}{\Longrightarrow}$ $U^\perp$ è T-invariante

$T|_{U^\perp} : U^\perp \longrightarrow U^\perp$ endomorfismo di $U^\perp$

$\dim U^\perp = n-1$

Ipotesi induttiva : $\Longrightarrow \exists\ \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ base ortonormale di autovettori per $T|_{U^\perp}$

Quindi

$\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ base ortonormale

$\square$

<u>Cor</u>: Una matrice Hermitiana è diagonalizzabile

Cor: A $n \times n$ reale. Sono equivalenti

1) A simmetrica

2) $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha base ortonormale di autovettori

rispetto a $\mathbb{R}^n$ euclideo

3) $\exists M$ ortogonale t.c.

$$ {}^tMAM = M^{-1}AM = D $$

dim:

1) $\Leftrightarrow$ 2) è il teorema spettrale

A simmetrica $\Leftrightarrow$ L_A autoaggiunta (uso base $\mathcal{C}$ che è ortonormale)

2) $\Leftrightarrow$ 3)

Esempi di endomorfismi autoaggiunti:

Riflessioni & proiezioni ortogonali