AFFINITÀ

$f(x) = Ax + b$

Oss: $f(0) = b$

ISOMORFISMI AFFINI

AFFINITÀ CHE SONO BIGEZIONI

$\Updownarrow$

A invertibile

similitudini

$f(x) = \lambda x \qquad \lambda \neq 0$

con centro l'origine

ISOMETRIE AFFINI

AFFINITÀ CHE MANTENGONO LE DISTANZE

$\Updownarrow$

A ortogonale

traslazioni

$T_b(x) = x + b$

rotazioni in $\mathbb{R}^2$

$f(x) = Rot_\vartheta x$

con centro l'origine

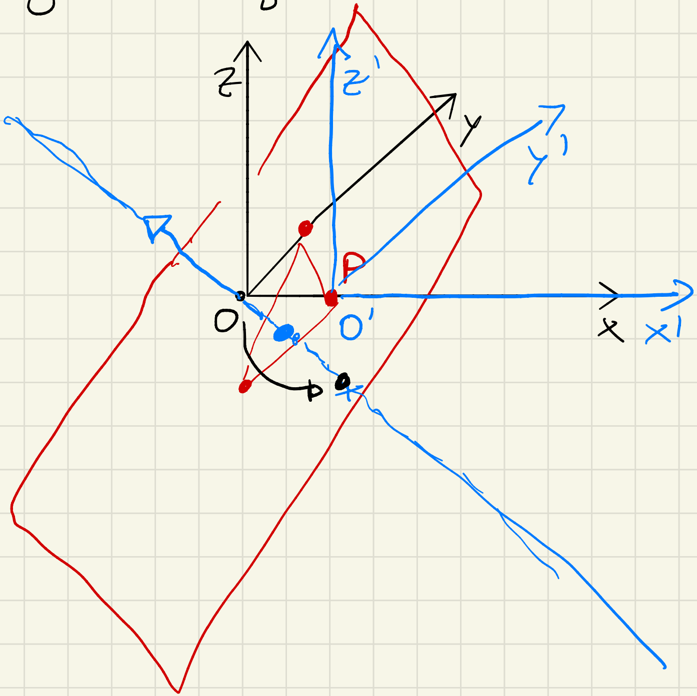
Altri esempi di isometrie affini

⊙ RIFLESSIONE ORTOGONALE

Es: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ riflessione ortogonale lungo

$$\pi = \{x + y - z = 2\}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}$$



Prendere un sist. riferimento in cui la nuova origine sta fissa

Def: I punti fissi di una affinità sono i $P \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(P) = P$

Esempio: $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x' = x - 2$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$\pi = \{x' + y' - z = 0\}$$

$$f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - 2\,\frac{-x'-y'+z'}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' \\ -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z' \\ \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = 0$$

Riporto tutto nelle coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \underbrace{- A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Big\downarrow}$$

$$y' = f(x') = Ax' + b$$

$$x' = x - P \qquad y' = y - P$$

$$y - P = \xcancel{f(x)} = A(x-P) + b$$

$$f(x) = y = \boxed{A(x-P) + b + P}$$

$$= \boxed{Ax - AP + b + P}$$

$$= Ax + b + (I - A)P$$

$$-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4/3\\4/3\\-4/3\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4/3\\4/3\\-4/3\end{pmatrix}$$

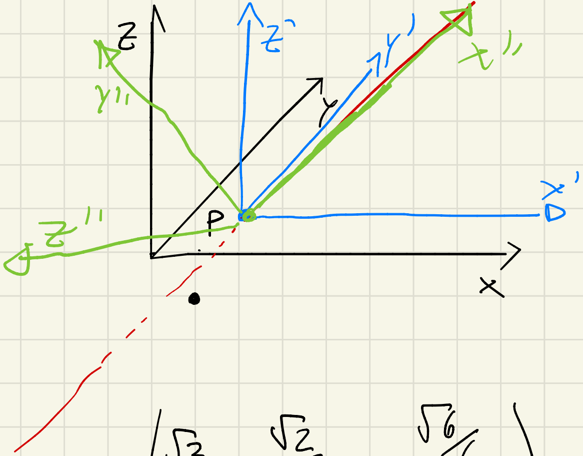
$$\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

⊙ Rotazione rispetto a retta $r \subseteq \mathbb{R}^3$

Es: Scrivi rotazione intorno a $r=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\text{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

di angolo $\frac{2\pi}{3}$

$$P = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$



Scrivo $f\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \begin{matrix}0 & 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{Rot_{\frac{2\pi}{3}}}\end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6\\ \sqrt{3}/3 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{6}/6\\ \sqrt{3}/3 & 0 & -\sqrt{6}/3\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

$$A' = M\,A\,\underset{\overset{\shortparallel}{{}^tM}}{M^{-1}}$$

$${}^tM = M^{-1}$$

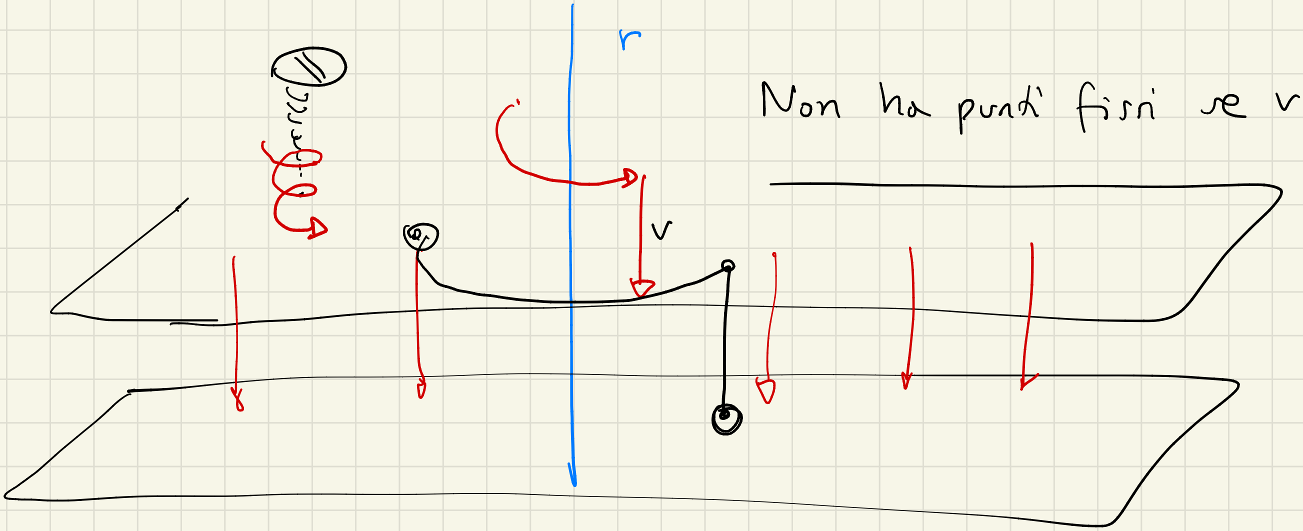
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - A'P + P = A'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= A'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$b = f(0)$

⊙ ROTOTRASLAZIONE := è la composizione di una rotazione in $\mathbb{R}^3$ intorno a retta r con una traslazione parallela a r

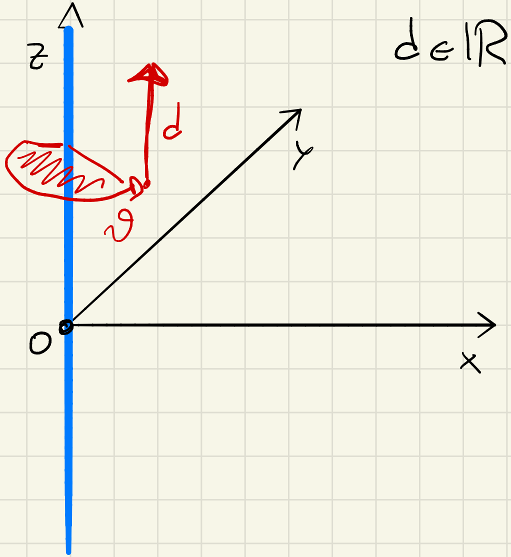


Non ha punti fissi se $v \neq 0$

Se $r = \text{Span } e_3$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\multicolumn{2}{c}{\boxed{Rot_\vartheta}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\d\end{pmatrix}$$

$d \in \mathbb{R}$



PROTOTIPO DI ROTOTRASLAZIONE

PUNTI FISSI

Prop: $f(x) = Ax + b$ affinità.

Se 1 non è autovalore di A allora f ha esattamente un punto fisso.

dim:

P è punto fisso $\iff f(P) = P \iff AP + b = P \iff$

$$\boxed{(A - I)P = -b}$$

Equazione per trovare i punti fissi P

Se 1 non è autovalore di A, $V_1 = \{0\}$, cioè

$V_1 = \mathrm{Ker}(A-I) = \{0\} \Rightarrow$ $A-I$ è invertibile

$$\cancel{(A-I)^{-1}(A-I)} \cdot P = (A-I)^{-1}(-b)$$

$$P = -(A-I)^{-1} b \qquad \exists!\ P \text{ punto fisso} \qquad \square$$

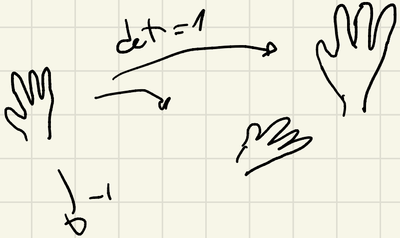
Oss: I punti fissi sono le soluzioni di $(A-I)P = -b$

possono essere $\emptyset$ oppure un sottospazio affine di dimensione $\mathrm{Ker}(A-I)$

$f(x) = Ax + b$ isometria affine del piano

Oss: Se $\det A = 1$, l'isomorfismo affine PRESERVA L'ORIENTAZIONE

" $\det A = -1$, " " INVERTE " "



Se $\det A = 1$ allora $A = \mathrm{Rot}_\vartheta$

Se $\det A = -1$ " $A = \mathrm{Rif}_\vartheta$

Prop: $f(x) = Ax + b$ isometria affine del piano con $\det A = 1$

$A = \mathrm{Rot}_\vartheta$,

1) Se $\vartheta = 0$, $b = 0$ $\Rightarrow f(x) = x$ identità

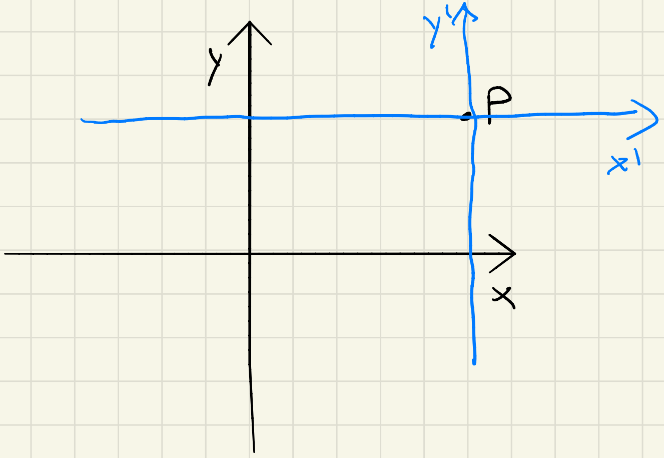
2) Se $\vartheta = 0$, $b \neq 0$ $\Rightarrow f(x) = x + b$ traslazione

3) Se $\vartheta \neq 0$ $\Rightarrow f(x) = \mathrm{Rot}_\vartheta x + b$
è una rotazione di centro

$$P = -(\mathrm{Rot}_\vartheta - I)^{-1} b$$

dim: 1) e 2) ovvi

3) $f(x) = Rot_\vartheta \, x + b$



Prop: $\vartheta \neq 0 \Rightarrow Rot_\vartheta$ non ha autovalore 1

$\Rightarrow \exists! \, P$ punto fisso $\quad P = -(Rot_\vartheta - I)^{-1} b$

Cambiando coordinate, in $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ottengo

$$f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Rot_\vartheta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 0$$

Nelle nuove coordinate è rotazione di angolo ϑ

Esempio:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

è una rotazione di centro

$$P = -\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Cor: Le isometrie affini di $\mathbb{R}^2$ sono traslazioni e rotazioni

Riprova: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ (esercizio)

vi viene $f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

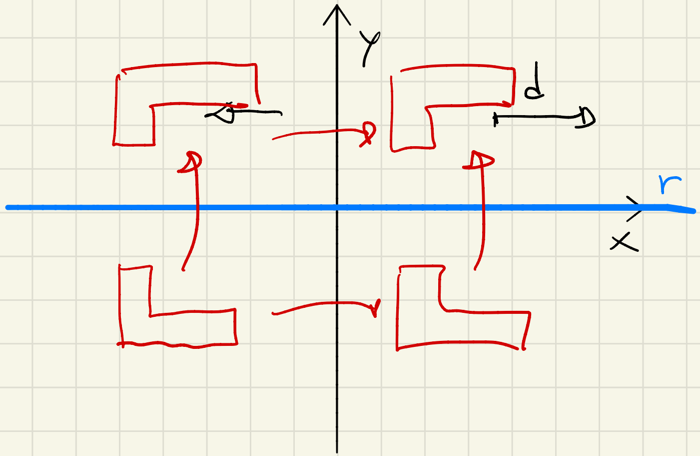
Prop: Le isometrie affini di $\mathbb{R}^2$ sono:

$$f(x) = Ax+b$$

	$Fix = \emptyset$	$Fix \neq \emptyset$
$\det A = 1$	traslazione	rotazione (oppure identità)
$\det A = -1$	glisso riflessione	riflessione lungo retta

Def: Una GLISSORIFLESSIONE è la composizione di una riflessione lungo $r \subseteq \mathbb{R}^2$ e di una traslazione parallela a r

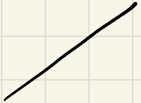
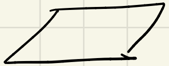
PROTOTIPO:



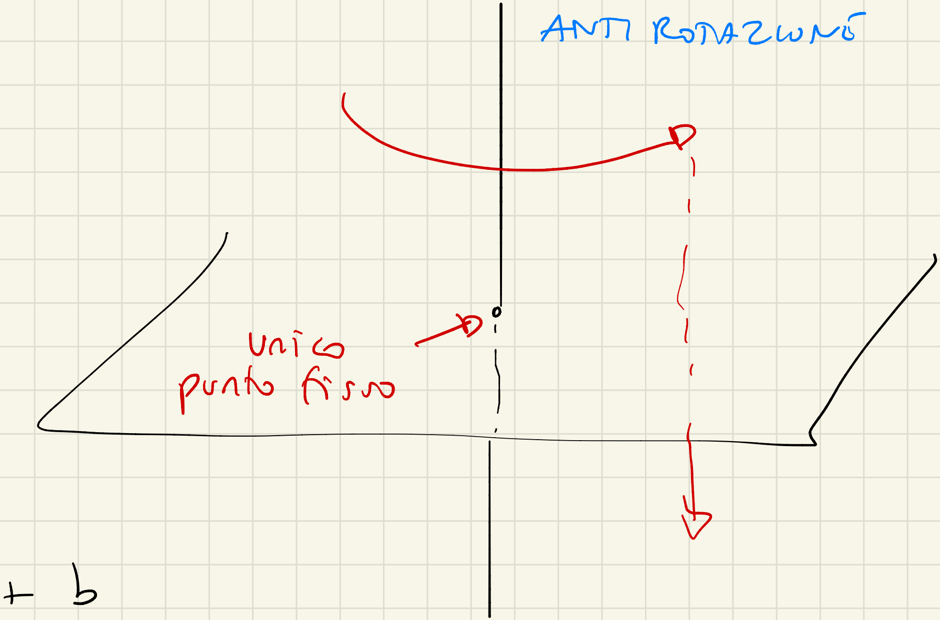
r = asse x

$$\boxed{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}}$$

<u>Teo</u>: Le isometrie affini di $\mathbb{R}^3$ sono: $f(x) = Ax + b$

Fix =	$\emptyset$	•			$\mathbb{R}^3$
$\det A = 1$	traslazioni rototraslazioni		rotazioni intorno a r		identità
$\det A = -1$	glisso-riflessioni	antirotazioni intorno a r		riflessione lungo un piano	

Def: Una glissoriflessione in $\mathbb{R}^3$ è la composizione di una riflessione lungo un piano π e di una traslazione parallela a π



⊙ traslazioni: $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + b$

⊙ Rototraslazioni:

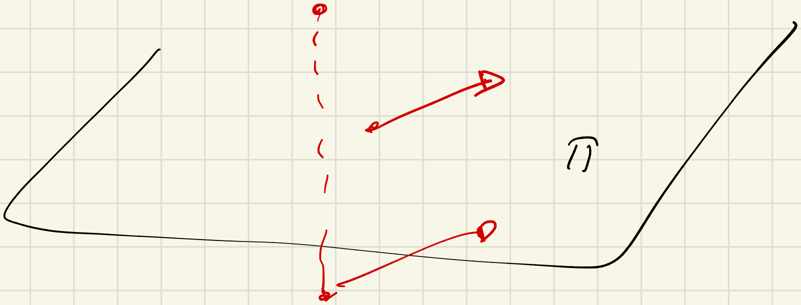
$$\boxed{f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Rot}_\vartheta & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\d\end{pmatrix}}$$

Se $d=0$ è rotazione   se $\vartheta=0$ è traslazione

⊙ Glissoriflessione:

$$\boxed{f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}}$$

Se $a=b=0$ otteniamo una riflessione



⊙ Antirotazione:

$$\boxed{f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c}\multicolumn{2}{c|}{\mathrm{Rot}_\vartheta}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\\hline 0&0&-1\end{array}\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}$$

$$A \Longleftrightarrow B$$

$A \Longrightarrow B$ $\qquad$ $B \Longrightarrow A$

$\neg A \Longrightarrow \neg B$ $\qquad$ $\neg A \Longrightarrow \neg B$