GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2019/20
DOMANDE FREQUENTI

Questa lista contiene alcune domande tipiche che possiamo fare durante l'orale. Per mettere la/o studente nelle condizioni migliori per iniziare l'esame, abbiamo deciso che la prima domanda dell'orale sarà sempre una di queste nella lista. *Attenzione:* ricordiamo che l'esame è su tutto il programma svolto (incluse le dimostrazioni viste a lezione), quindi le domande successive possono essere diverse da quelle presenti qui e coprire argomenti che qui non sono menzionati (ma sono stati fatti a lezione).

Questa lista non è ancora esaustiva: lo sarà alla fine del corso.

1. Nozioni generali

(1) Cos'è una funzione iniettiva? suriettiva? bigettiva?
(2) Proprietà dei numeri complessi: formano un campo, complesso coniugato, rappresentazione geometrica, coordinate polari, radici n-esime.
(3) Polinomi e loro radici. Molteplicità di una radice. Enunciato del Teorema fondamentale dell'algebra.
(4) Definizione e proprietà del prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$.

2. Matrici

(1) Operazioni algebriche di base sulle matrici: somma, prodotto, traccia, trasposta. Definizione di matrice invertibile.
(2) Sistemi lineari. Mosse di Gauss. Algoritmo di Gauss – Jordan per risolvere sistemi lineari.
(3) Teorema di Rouché – Capelli.
(4) Definizione, calcolo e proprietà di rango e determinante di una matrice (formula di Binet, sviluppo di Laplace, formula di Cramer).

3. Spazi vettoriali

(1) Cos'è un sottospazio vettoriale?
(2) Definisci intersezione $U \cap W$ e somma $U + W$ di sottospazi vettoriali $U, W \subset V$. Mostra che $U \cap W$ e $U + W$ sono anche loro sottospazi vettoriali di V.
(3) Definisci la somma diretta fra sottospazi di V.
(4) Cosa vuol dire che alcuni vettori $v_1, \ldots, v_k$ generano V? Che sono indipendenti? Che formano una base di V?
(5) Estrai una base da un insieme di generatori dato. Completa un insieme di vettori indipendenti dato ad una base.

(6) Definisci la dimensione di V. Dimostra che è ben definita, cioè che due basi hanno sempre la stessa cardinalità.
(7) Enuncia e dimostra la Formula di Grassmann.

4. Applicazioni lineari

(1) Cos'è una applicazione lineare?
(2) Cosa sono il nucleo e l'immagine di una applicazione lineare $T: V \to W$? Dimostra che sono sottospazi rispettivamente di V e W.
(3) Come è definita la matrice associata ad una applicazione lineare?
(4) Costruisci una applicazione lineare che soddisfi alcune proprietà date.
(5) Enuncia e dimostra il Teorema della dimensione.

5. Diagonalizzabilità e Forma di Jordan

(1) Definisci autovalori, autovettori, autospazio, diagonalizzabilità di un endomorfismo o matrice.
(2) Definizione e proprietà del polinomio caratteristico di una matrice. Perché le sue radici sono gli autovalori della matrice?
(3) Dimostra che autovalori con autovettori distinti sono sempre indipendenti.
(4) Dimostra che gli autospazi di un endomorfismo sono in somma diretta.
(5) Enuncia e dimostra il Teorema di diagonalizzabilità.
(6) Determina se una data matrice o endomorfismo è diagonalizzabile.
(7) Determina la forma di Jordan di una matrice data.

6. Prodotti scalari

(1) Cos'è un prodotto scalare? Cosa vuol dire che è degenere o definito positivo? Fai degli esempi.
(2) I vettori isotropi sono sempre nel radicale? I vettori nel radicale sono sempre isotropi? Un prodotto scalare non degenere può contenere vettori isotropi? Fai degli esempi.
(3) Come è definita la matrice associata ad un prodotto scalare rispetto ad una base? Cosa succede se cambio base?
(4) Definizione e calcolo del sottospazio ortogonale $W^\perp$ ad un sottospazio $W \subset V$. Definizione e calcolo del radicale $V^\perp$.
(5) Enuncia e dimostra il teorema che mette in relazione W e $W^\perp$ e le loro dimensioni (l'enunciato con 4 punti).
(6) Definisci la segnatura di una matrice simmetrica o di un prodotto scalare.
(7) Enuncia e dimostra il Teorema di Sylvester.
(8) Determina la segnatura di una matrice o di un prodotto scalare dato.
(9) Dimostra che la segnatura di una matrice diagonale è pari al numero di elementi positivi, negativi e nulli sulla diagonale.

(10) Dato un prodotto scalare su V, determina se esistono sottospazi $W \subset V$ con una segnatura data.

7. Prodotti scalari definiti positivi

(1) Definisci la norma, la distanza, e l'angolo fra due vettori non nulli. Descrivi le principali proprietà di queste nozioni.
(2) Definisci la proiezione ortogonale p_U su un sottospazio vettoriale $U \subset V$. Calcola p_U per un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^3$.
(3) Ortogonalizza una base tramite il metodo di Gram – Schmidt
(4) Cos'è una isometria vettoriale? Dimostra che esistono 3 definizioni equivalenti (isomorfismo che mantiene il prodotto scalare, la norma, la distanza).
(5) Cos'è una matrice ortogonale? Che proprietà ha?
(6) Dimostra che le uniche matrici ortogonali 2×2 sono Rot_θ e Rif_θ.
(7) Dimostra che le uniche isometrie vettoriali di $\mathbb{R}^3$ sono rotazioni e antirotazioni.
(8) Scrivi una rotazione in $\mathbb{R}^3$ con asse e angolo dati.
(9) Determina il tipo di isometria di una matrice ortogonale 3×3 data.

8. Geometria affine

(1) Risolvi esercizi su rette e piani affini in $\mathbb{R}^3$.
(2) Enuncia e dimostra le formule per calcolare la distanza fra un punto e una retta, un punto e un piano, due rette sghembe.
(3) Definisci e calcola l'angolo fra due rette, una retta e un piano, due piani.
(4) Definisci affinità, isomorfismo affine, isometria affine.
(5) Mostra che $f(x) = Ax + b$ è un isomorfismo affine $\iff A$ è invertibile, ed una isometria $\iff A$ è ortogonale.
(6) Scrivi vari tipi di isomorfismi e isometrie affini in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: omotetia di centro P, rotazione in $\mathbb{R}^2$ di centro P, rotazione in $\mathbb{R}^3$ intorno ad una retta affine, riflessione rispetto ad un piano o retta affine, rototraslazione in $\mathbb{R}^3$ intorno ad una retta r di un certo passo d, antirotazioni, glissoriflessioni in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
(7) Dimostra che se A non ha 1 come autovalore allora $f(x) = Ax + b$ ha esattamente un punto fisso.
(8) Dimostra la classificazione delle isometrie affini del piano che preservano l'orientazione.
(9) Enuncia la classificazione delle isometrie affini del piano e dello spazio. Determina il tipo di isometria affine data.

9. Teorema spettrale

(1) Definisci i prodotti hermitiani.

(2) Definizione e proprietà degli endomorfismi autoaggiunti.
(3) Enuncia e dimostra il Teorema spettrale

10. Coniche e quadriche