0.1. **Indicazioni per lo studio e per gli esercizi per casa.**

Sabato 29 settembre: gli argomenti trattati realtivi agli insiemi li trovate nella nota "Richiami sugli insiemi", mentre il materiale relativo ai numeri complessi lo trovate nella nota "Numeri complessi: I parte". Per casa potete fare gli esercizi che trovate nella nota sugli insiemi e gli esercizi 1.1 - 1.8.

Sabato 6 ottobre: trovate gli argomenti trattati questa settimana nelle note sui numeri complessi, I e II parte. Per casa potete fare gli esercizi 1.9-1.12 e 2.1-2.6.

Sabato 13 ottobre: trovate gli argomenti trattati questa settimana nelle note sui numeri complessi, II e III parte. Per casa potete fare gli esercizi 2.7-2.18.

Sabato 20 ottobre: trovate gli argomenti trattati questa settimana nelle note sui numeri complessi, III parte e IV parte e nelle note sulla geometria dello spazio I parte. Per casa potete fare qualsiasi esercizio sui numeri complessi. l'1.13, l'1.15, gli esercizi dal 3.1 al 3.7. Si consiglia di concentrarsi su questi ultimi nove esercizi.

Sabato 27 ottobre: trovate gli argomenti trattati questa settimana nelle note sulla geometria dello spazio II parte e nel capitolo 2 del libro. Per casa potete fare qualsiasi esercizio sulla parte relativa alla geometria del piano e dello spazio, qualsiasi esercizio della sezione sugli spazi e sottospazi vettoriali e l'esercizo 2.1 del libro. Si consiglia di fare almeno i primi due esercizi della sezione sugli spazi vettoriale e i primi quattro esercizi della sezione sulle basi.

Sabato 3 novembre: trovate gli argomenti trattati questa settimana nelle sezioni 3.4.1-3.4.4 del libro e nelle sezioni 4.1 e 4.2.1 e 4.2.2. Potete fare gli esercizi sulle matrici e i primi quattro esercizi sulle applicazioni lineari. Consiglio di fare almeno il primo esercizio sulle matrici e i primi quattro esercizi sulle applicazioni lineari.

Sabato 10 novembre: trovate gli argomenti trattati questa settimana nelle sezioni 4.1, 4.2, 4.3 e 3.4.5. Potete fare gli esercizi del libro 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.15. Potete inoltre fare gli esercizi 7.5, 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10. Consiglio di fare almeno un paio di esercizi tra 7.5, 7.6, 7.7 e un esercizio tra 7.8, 7.9, 7.10.

Sabato 17 novembre: trovate gli argomenti trattati questa settimana nelle note sui sistemi lineari che compariranno. Potete fare gli esercizi del libro 3.1, 3.2, 3.4. Potete inoltre fare gli esercizi 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4. Consiglio di fare almeno gli esercizi 8.1, 8.2, 8.3.

Sabato 24 novembre: troverete gli argomenti trattati questa settimana e la precedente nelle note "sistemi linerari" e nelle note "dimensione: I parte" che spero saranno disponibili al più presto. Potete fare gli esercizi della sezione sul teorema fondamentale e l'esercizio 7.11.

Sabato 1 dicembre: trovate gli argomenti trattati questa settimana nelle note "dimensione: II parte" e nelle note "Descrizione di sottospazi vettoriali". Potete fare qualsiasi esercizio fino alla sezione 10.

Sabato 8 dicembre: trovate gli argomenti trattati questa settimana nelle note "Determinanti".

Sabato 15 dicembre: trovate gli argomenti trattati questa settimana nelle note "Determinanti" e nella sezione 5.1 del libro. Potete fare qualsiasi esercizio fino alla sezione 11 e gli esercizi 12.1, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5.

Giovedì 20 dicembre. Trovate gli argomenti trattati questa settimana nelle sezioni 5.1 e 5.2 del libro. Potete fare qualsiasi esercizio fino alla sezione 12. Potete fare quasi tutti gli esercizi dei compitini (quest'anno non abbiamo fatto il duale, e non abbiamo parlato di spazi affini).

1. Esercizi vari e richiami

Questi esercizi riguardano argomenti che nel corso sono stati solo velocemente richiamati durante la prima settimana e che il corso presuppone noti dalle superiori. Si tratta di qualche nozione di calcolo proposizionale, di insiemistica, di trigonometria e coordinate polari.

Esercizio 1.1. Avete a disposizione un recipiente che contiene esattamente 36 cc, uno che ne contiene 15, un grande recipiente da 9 lt e una fonte d'acqua. Utilizzando questi recipiente possibile lasciare nel recipiente grande esattamente

- 21 cc
- 20 cc
- 3 cc

se possibile far vedere come, se impossibile spiegare perché.

Esercizio 1.2. Due bambini giocano sul tavolo di casa che e' perfettamente rettangolare. Hanno a disposizione una pila di piatti circolari tutti uguali. I due giocatori dispongono alternandosi un piatto sul tavolo in una zona libera, ovvero senza che questo sia sovrapposto in nessun modo ai piatti precedenti. Perde il primo giocatore che non riesce a mettere il piatto o il cui piatto cade. All'inizio il tavoli è vuoto. Il primo giocatore ha una strategia vincente. Quale?

Esercizio 1.3. Scrivere il numero $1,2\overline{345}$ come frazione. Scrivere la frazione $11/7$ come numero con la virgola.

Esercizio 1.4. In una classe di Ingegneria meccanica di 250 studenti tutti hanno almeno dato un esame tra analisi, geometria e fisica al primo appello utile. 150 hanno dato analisi, 100 geometria, 75 fisica, 25 sia geometria che analisi e 15 tutti e tre gli esami. Gli studenti che hanno dato sia geometria che fisica hanno dato anche analisi. Quanti sono gli studenti che hanno dato almeno due esami?

Esercizio 1.5. Sia

$$A = \{1,2,3,5\} \qquad B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 9 \text{ o } x^2 = 16\} \quad \text{e} \quad C = \{4,6,7\}$$

Si descrivano gli insiemi

$$A \smallsetminus B \qquad C \times (A \smallsetminus B) \qquad (A \times B) \cap (C \times B).$$

elencandone gli elementi.

Esercizio 1.6. Sia $A = \{-1,0,1,2,3\}$ e sia $B = \{x^2 \, : \, x \in A\}$. Si calcoli $card(B)$.

Esercizio 1.7. Siano A e B due sottoinsiemi dell'insieme C, ovvero contenuti in C. Sia

$$D = \{x \in C \, : \; \text{se } x \in A \text{ allora } x \in B\}$$

Capire chi è l'insieme D. Si faccia un disegno di A, B e C e si colori l'insieme D.

Esercizio 1.8. Si dia un descrizione più esplicita dei seguenti insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} \, : \, \forall y \in \mathbb{R} \; \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } x + y + z = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \, : \, \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall y \in \mathbb{R}, \; x + y + z = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \, : \, \forall y \in \mathbb{R} \; \exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } x\,z = x\,z\,y^2\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \, : \, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall z \in \mathbb{R}, \; x\,z = x\,z\,y^2\}.$$

Esercizio 1.9. Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari senza usare la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 3\pi/2 \qquad \rho = 3, \alpha = 5\pi/4 \qquad \rho = 2, \alpha = -\pi/3 \qquad \rho = 4, \alpha = -\pi/6$$

Esercizio 1.10. Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane senza usare la calcolatrice

$$(-2,-2), \qquad (3, -3\sqrt{3}), \qquad (-1,1)$$

Esercizio 1.11. Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari usando la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 1,1 \qquad \rho = 3, \alpha = \pi/7 \qquad \rho = 2, \alpha = 2 \qquad \rho = 4\sqrt{3}, \alpha = -\pi/9$$

Esercizio 1.12. Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane usando la calcolatrice
$$(-2,-3), \qquad (3,5), \qquad (4,1)$$

Esercizio 1.13. Sia S una sfera di raggio 1 e sia C un cono a base circolare e con altezza passante per il centro della base, circoscritto alla sfera. Sapendo che la base del cono ha area uguale a 4π calcolare il volume.

Esercizio 1.14. Si dimostri che esistono infiniti numeri primi procedendo nel seguente modo: si supponga per assurdo che siano in numero finito e che siano $p_1, \ldots, p_n$ si consideri il numero $m = p_1 \cdots p_n + 1$ e si osservi che questo numero non è divisibile per nessuno dei numeri precedenti.

Esercizio 1.15. Sia dato un cubo di lato 1.

(1) Quanto è lunga la strada più corta lungo la superficie del cubo per andare da un vertice al vertice opposto?
(2) Si considerino 4 vertici del cubo A, B, C, D non adiacenti (non appartenenti ad uno stesso spigolo). Calcolare il volume del solido i cui vertici sono A, B, C, D.

2. Numeri complessi

Esercizio 2.1. Calcolare $(1+i)^2$. Calcolare $(3+4i)\cdot(3-2i)$.

Esercizio 2.2. Sia $z = 3+4i$ e $w = 7-3i$. Calcolare $\bar{z}/w$ e $z \cdot \bar{w}$.

Esercizio 2.3. Verificare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $\bar{\bar{z}} = z$.

Esercizio 2.4. Calcolare le radici quadrate complesse dei seguenti numeri:
$$37, \quad -169, \quad ,9i, \quad -\frac{3}{4}+i, \quad 3+7i.$$
(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

Esercizio 2.5. Risolvere le seguenti equazioni dove z è un numero complesso
$$(1+i)z + 14 = 0, \quad z^2 + 5z + 10 = 0, \quad (1+i)z^2 + \sqrt{3}z - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = 0$$
(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

Esercizio 2.6. Calcolare le radici quarte di -16 (ovvero gli z tali che $z^4 = -16$). Calcolare le radici ottave di 1 (ovvero gli z tali che $z^8 = 1$). [utilizzare le coordinate polari].

Esercizio 2.7. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = \bar{z}^3$.

Esercizio 2.8. Determinare tutti i numeri complessi z tali che
$$\frac{z-i}{z+i}$$
è un numero reale.

Esercizio 2.9. Determinare tutti i numeri complessi z tali che
$$\frac{|z-i|}{|z+i|} = 2.$$

Esercizio 2.10. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $e^z = e$.

Esercizio 2.11. Risolvere le seguenti equazioni, dove $z \in \mathbb{C}$:
$$(z-\bar{z})^3 = i \qquad z^2 + (i-1)z - i = 0 \qquad z^3 = iz\bar{z}$$

Esercizio 2.12. Calcolare $(1-i)^{24}$. Risolvere $z^3 = arg\,(z) + \frac{\pi}{6}$ e $z|z| = 2\,Re\,(z)$.

Esercizio 2.13 (Daddi)**.** Si determini il valore del parametro reale k in modo che l'equazione $z^2 + (3 + k\,i)\,z = 8 - 9\,i$ abbia, tra le sue soluzioni, il numero complesso $2 - i$. Si determini poi l'altra soluzione dell'equazione.

Esercizio 2.14 (Daddi)**.** Assegnata l'equazione

$$3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{368} z - 18 + \frac{k}{z} = 0$$

dove k un parametro reale, si determinino gli eventuali valori di k in modo che le soluzioni siano non reali ed abbiano modulo uguale a $\sqrt{10}$.

Esercizio 2.15 (Daddi)**.** Tra i numeri complessi della forma

$$z = k + 1 + i\,(2\,k - 3)$$

dove k un numero reale, determinare quello avente modulo minimo.

Esercizio 2.16 (Daddi)**.** Si disegni nel piano complesso l'insieme rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} |\mathrm{Im}(z - 2 + 4\,i)| \leqslant 1 \\ |z - 1 + 3\,i| > 3\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.17. Risolvere l'equazione $e^{3z} + 5e^{2z} + 7e^z = 0$.

Esercizio 2.18. Trovare tutte le $z, w \in \mathbb{C}$ che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} z\bar{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2.19 (Daddi)**.** Pierino, dopo vari anni di tentativi poco fruttuosi, si sta finalmente appassionando alla matematica; purtroppo oggi ha perso il foglio sul quale aveva scritto gli appunti della lezione. Appena arrivato a casa, prova a ricostruire un esercizio svolto dal professore; si ricorda che si trattava di determinare le soluzioni di un'equazione della forma $2\,z^3 + \ldots z^2 + \ldots z + \ldots = 0$, dove al posto dei puntini ci sono dei numeri reali. Pierino ricorda anche che, tra le soluzioni dell'equazione, ci sono -2 e $-1 + 4\,i$. Si dica qual l'equazione che il professore ha scritto alla lavagna.

Esercizio 2.20. Sia $w = e^{\frac{2\pi\, i}{n}}$, allora $w^{n-1} + w^{n-2} + \cdots + w + 1 = 0$.

Esercizio 2.21. Sia a, b, c tre numeri complessi. Dimostrare che a, b, c sono i vertici di un triangolo equilatero se e solo se

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

Esercizio 2.22. Si trovi una formula per l'ennessimo termine della successione x_n definita nel modo seguente:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}.$$

Esercizio 2.23. Dati $a, b, c \in \mathbb{C}$ trovare una equazione polinomiale in a, b, c che dica quando il triangolo che ha come vertici a, b, c sia isoscele e rettangolo in a.

Esercizio 2.24. Descrivere usando i numeri complessi la rotazione di $\pi/3$ attorno al punto $1 + 3i$.

Esercizio 2.25. Descrivere usando i numeri complessi la riflessione rispetto alla retta passante per -3 e parallela alla bisettrice del primo quadrante.

3. Geometria del piano e dello spazio

Esercizio 3.1. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$. Calcolare

$$p + 3q - r \qquad 3p - 2q + r$$

Esercizio 3.2. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$, $s = (1, 1, 1)$. Calcolare il baricentro dei quattro punti.

Esercizio 3.3. Siano dati i punti $p = (2, 3)$, $q = (0, 1)$, $r = (-2, 1)$, $s = (1, 1)$. Calcolare l'intersezione tra le rette pq e rs.

Esercizio 3.4 (Lombardo)**.** Sia dato un quadrilatero convesso $abcd$ nel piano. Si dimostri che esiste un punto comune ai segmenti congiungenti i punti medi dei lati opposti e al segmento congiungente i punti medi delle due diagonali. Di che punto si tratta?

Esercizio 3.5. Siano dati i punti $p = (1, 2, 3)$, $q = (0, 1, -2)$, $r = (-2, 1, 1)$. Calcolare lunghezza dei lati, perimetro e angoli del triangolo pqr. [per gli angoli usare la calcolatrice].

Esercizio 3.6. Siano dati i tre punti del piano cartesiano di coordinate $(2,3)$, $(7,1)$, $(5,4)$. Calcolare area, perimetro e angoli del triangolo da essi individuato.

Esercizio 3.7. Siano dati i punti $(1,2,3)$, $(3,4,5)$, $(7,1,0)$. Calcolare area, perimetro e angoli del triangolo da essi individuato.

Esercizio 3.8. Sia abc un triangolo non degenere. Si dimostri che le tre altezze si incontrano in uno stesso punto.

Esercizio 3.9. Sia abc un triangolo non degenere. Sia p l'intersezione delle altezze (ortocentro), q l'intersezione delle mediane (baricentro) e r il centro del triangolo circoscritto (circocentro). Si dimostri che p, q, r giacciono su una stessa retta.

Esercizio 3.10. Da un punto P esterno ad una circonferenza si tracci una retta che interseca il cerchio e siano A e B i due punti di intersezione (eventualemente coincidenti se la retta è tangente alla circonferenza). Si dimostri che

$$dist(A,P)\, dist(B,P) = d^2 - r^2$$

dove d è la distanza di P dal centro della circonferenza e r è il raggio della circonferenza.

Esercizio 3.11. Siano dati i punti $p = (1,2,3)$, $q = (0,1,-2)$. Calcolare la proiezione di q sulla retta Op e la distanza di q da tale retta.

Esercizio 3.12. Siano dati i punti $p = (1,2,3)$, $q = (0,1,-2)$, $r = (-2,1,1)$. Calcolare la proiezione di r sulla retta pq e la distanza di r da tale retta.

Esercizio 3.13. Sia π piano $x + y + z = 0$. Si calcoli la proiezione di $p = (1,2,3)$ su π e la distanza di p da π. Si calcoli inoltre il simmetrico di p rispetto a π.

Esercizio 3.14. Sia π piano $x + y + z = 1$. Si calcoli la proiezione di $p = (1,2,3)$ su π e la distanza di p da π. Si calcoli inoltre il simmetrico di p rispetto a tale piano.

Esercizio 3.15. Siano dati i punti $p = (1,2,3)$, $q = (0,1,-2)$, $r = (-2,1,1)$.

Esercizio 3.16. Calcolare il volume del tetraedro che ha come vertici i punti $(1,0,1)$, $(1,2,-3)$, $(1,1,1)$, $(3,1,1)$.

Esercizio 3.17. Sia Π il piano di equazioni $ax + by + cz = d$. Si determini una formula per la distanza di un punto di coordinate (α, β, γ) da Π.

Esercizio 3.18. Sia U la retta di $\mathbb{R}^3$ generata da $(1,1,1)$ e sia C la sfera di centro $A = (0,2,4)$ e raggio 1.

(1) Determinare la distanza di A da U.
(2) Determinare i piani contenenti U e tangenti alla sfera.

4. Spazi e sottospazi vettoriali

Esercizio 4.1. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Quali sono sottospazi vettoriali?

$$\begin{aligned}
U &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 0\} \\
W &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 1\} \\
X &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\
Y &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0\} \\
Z &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + 4y^2 = 0\}
\end{aligned}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si,No,No,No,Si]

Esercizio 4.2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Quali sono sottospazi vettoriali?

$$\begin{aligned} U &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1) = 0 \; e \; f(2) = 0\} \\ W &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(1)f(2) = 0\} \\ X &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(-x) = f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \\ Y &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x+1) = 2f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \\ Z &= \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) : f(x+1) = f(x) + 1 \text{ per ogni } x \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Nei casi in cui è un sottospazio si devono verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi, nei casi in cui non è un sottospazio basta fare un esempio che mostra che almeno una di queste proprietà fallisce. [Si,No,Si,Si,No]

Esercizio 4.3. Siano U e W due spazi vettoriali e sia $V = U \times W$. Su V definisco O, somma e prodotto per scalare nel seguente modo:

$$(u, w) + (u', w') = (u + u', w + w') \qquad \lambda \cdot (u, w) = (\lambda u, \lambda w) \qquad 0 = (0, 0)$$

per ogni $u, u' \in U$, $w, w' \in W$ e $\lambda \in K$. Si verifiche che V è uno spazio vettoriale.

Esercizio 4.4. Si dimostri che se U e W sono due sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V allora $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 4.5. Sia $\mathcal{R}$ una retta passante per l'origine di $\mathbb{R}^3$ e sia Π il piano ortogonale a $\mathcal{R}$ passante per l'origine. Si determini $\mathcal{R} \cap \Pi$ e $\mathcal{R} + \Pi$.

Esercizio 4.6. Dimostrare che gli unici sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono $\{0\}$ le rette e tutto $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4.7. Sia V uno spazio vettoriale su K. Allora $0 \cdot v = 0_V$ per ogni $v \in V$ e $\lambda \cdot 0_V = 0_V$ per ogni $\lambda \in K$.

Esercizio 4.8. Sia $V, +_V, \cdot_V, 0_V$ il seguente spazio vettoriale su $\mathbb{R}$: come insieme $V = \mathbb{R}^+$, $0_V = 1$ e somma e prodotto sono definite nel modo seguente

$$x +_V y = xy \qquad \lambda \cdot_V x = x^\lambda$$

per $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Verificare che è uno spazio vettoriale.

Esercizio 4.9. Siano U e W due sottospazi dello spazio vettoriale V. Si dimostri che se $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V allora $U \subset W$ o $W \subset U$.

5. Basi, generatori e vettori linearmente indipendenti

Esercizio 5.1. Trovare una base del sottospazio $x - y + 3z = 0$ di $\mathbb{C}^3$. Scrivere le coordinate di $(1, 4, 1)$ rispetto alla base scelta.

Esercizio 5.2. Si dimostri che i seguenti polinomi sono una base di $\mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$: $f_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)$, $f_2(t) = \frac{1}{2}t(t-1)$, $f_3(t) = -t(t-2)$. Sia $f = t^2$, scrivere le coordinate di f rispetto a f_1, f_2, f_3. Se f è un polinomio qualsiasi quali sono le coordinate di f rispetto alla base f_1, f_2, f_3. (C'è un modo molto sintetico ed efficace per farlo)

Esercizio 5.3. Descrivere una base delle spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

Esercizio 5.4. Sia V uno spazio vettoriale V su K. Siano $u, v \in V$ e sia v diverso da zero. Dimostrare che u e v sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $\lambda \in K$ tale che $u = \lambda v$.

Esercizio 5.5. Sia v_1, v_2, v_3, v_4 una base di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che per ogni v in V i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v generano V ma non sono linearmente indipendenti.

Esercizio 5.6. Sia v_1, v_2, v_3, v_4 una base di uno spazio vettoriale V e sia $U = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ e $W = \mathrm{Span}(v_3, v_4)$. Determinare $U \cap W$ e $U + W$.

Esercizio 5.7. Siano $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$ e sia $U = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_h)$ e sia $W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$. Allora $U + W$ è generato da $u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k$. [Se aiuta sostituire h e k con 2 e 3]

Esercizio 5.8. Sia U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Siano $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$. Dimostrare che se $U \cap W = \{0\}$ e u_1, u_2 sono lineamente indipendenti e w_1, w_2 sono linearmente indipendenti allora u_1, u_2, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 5.9. Sia X un insieme finito e K un campo e sia $V = \mathcal{F}_K(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni da X in K definito in classe. Per ogni $x \in X$ sia δ_x la funzione definita nel modo seguente:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x; \\ 0 & \text{se } y \neq x. \end{cases}$$

Dimostrare che se $x_1, \dots, x_n$ sono gli elementi di X allora $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$ è una base di $\mathcal{F}_K(X)$.

Esercizio 5.10. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ dei vettori linearmente indipendenti. Sia $v \in V$. Dimostrare che $v_1, \dots, v_n, v$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Esercizio 5.11. Si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che sono una base di $\mathbb{R}^4$ e si calcolino le cordinate dei seguenti vettori rispetto a questa base:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Matrici

Esercizio 6.1. Siano date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare i prodotti $A \cdot A$, $B \cdot C$.
(2) Si può eseguire il prodotto $A \cdot D$? E il prodotto $D \cdot A$? calcolare quello dei due che si può eseguire.
(3) Calcolare $AB - BA$ e $BC - CB$.
(4) Calcolare $D \cdot G$ e $G^2 + G = G \cdot G + G$.
(5) Calcolare A^{101}.
(6) Calcolare $H \cdot G$ e $G \cdot H$.
(7) se M è una matrice $m \times 3$ e N è una matrice $3 \times n$ descrivere il prodotto $H \cdot N$ e $M \cdot H$.

Esercizio 6.2. È vero che se A e B sono matrici 2×2 e $A \cdot B = 0$ allora $A = 0$ o $B = 0$. Dimostrare che è vero o esibire un controesempio.

Esercizio 6.3. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tali che $ad - bc \neq 0$. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

Esercizio 6.4. (1) Si dimostri che se A è una matrice 3×2 a coefficienti reali e non nulla, allora $Tr(A \cdot A^t) > 0$.
(2) Si dimostri che se A è una matrice $m \times n$ a coefficienti reali e non nulla allora $Tr(A \cdot A^t) > 0$.

Esercizio 6.5. Si cosideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli $Tr(A^{1001})$.

Definizione. Una matrice quadrata A si dice simmetrica se è simmetrica rispetto alla diagonale ovvero se $A^t = A$. Si dice invece antisimmetrica se $A^t = -A$. Indichiamo con Matsim_n l'insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ e con Matant_n quello delle matrici antisimmetriche $n \times n$.

Esercizio 6.6. Si dimostri che Matsim_n è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}_{n\times n}$. Se ne determini una base nel caso di $n = 2$.

Esercizio 6.7. Si dimostri che Matant_n è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}_{n\times n}$. Se ne determini una base nel caso di $n = 3$.

Esercizio 6.8. Sia $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.

(1) Si determini $\mathrm{Matsim}_n \cap \mathrm{Matant}_n$.
(2) Si determini $\mathrm{Matsim}_2 + \mathrm{Matant}_2$.
(3) Si dimostri che $\mathrm{Matsim}_n + \mathrm{Matant}_n = \mathrm{Mat}_{n\times n}$.

Esercizio 6.9. Sia A una matrice $m \times h$ e B una matrice $h \times n$. Si dimostri che

(1) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.
(2) Se inoltre $m = n$ vale $\mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$.

Esercizio 6.10. Sia data la matrice a coefficienti complessi:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supponiamo che esista una matrice 2×2, B tale che $A \cdot B = I_2$. Si dimostri che $ad - bc \neq 0$ e che B è uguale alla matrice scritta nell'esercizio 6.3

Esercizio 6.11. Sia A una matrice $m \times m$ invertibile. Dimostrare che A^t è invertibile e che $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Esercizio 6.12. Siano A e B due matrici $m \times m$ invertibili. Dimostrare che AB è invertibile e che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

7. Applicazioni lineari

Esercizio 7.1. Quali delle seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ è una applicazione lineare?

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z + y \\ 5y \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z \\ x \end{pmatrix} \qquad h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - e^y \\ z + x \end{pmatrix} \qquad c\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad d\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$$

Esercizio 7.2. Sia $V = \mathbb{C}[t]$ e siano $G : V \longrightarrow V$, $G : V \longrightarrow \mathbb{C}^3$ e $H : \mathbb{C}^3 \longrightarrow V$ definite nel modo seguente:

$$F(p(t)) = (t^2 - 5t)p(t) \qquad G(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(3) \\ p(7) \end{pmatrix} \qquad H\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(t-1) + y(t-3) + z(t-7) + (t-8)$$

(1) dire quali tra F, G, H sono lineari.
(2) dire quali tra F, G, H sono iniettive?
(3) dire quali tra F, G, H sono surgettive?
(4) Determinare $G \circ H$ e $F \circ H$.

Esercizio 7.3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z \\ 2x + y \\ x + z \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

(1) Si determini una matrice A tale che $F = L_A$;
(2) Si dica quali dei seguenti punti sono nel nucleo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Si dica quali dei seguenti punti sono nell'immagine:

$$\begin{pmatrix}4\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\0\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.4. Sia $F : \mathbb{C}[t] \longrightarrow \mathbb{C}[t]$ l'applicazione lineare definita da $F(f) = f'$ la derivata rispetto a t di f. Si determini il nucleo e l'immagine.

Esercizio 7.5. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 3}$ e sia $F : V \longrightarrow V$ definita da $F(p(t)) = p'(t) + p(t+1)$. Si verifiche che è una applicazione lineare e si calcoli la matrice associata a F rispetto alla base standard di V in partenza e in arrivo.

Esercizio 7.6. Sia $V = \mathrm{Mat}_{2\times 3}$ e $W = \mathrm{Mat}_{2\times 2}$. Sia inoltre

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}$$

Sia $R_A : V \longrightarrow W$ l'applicazione definita da $R_A(X) = X \cdot A$. Si dimostri che R_A è lineare e se ne calcoli la matrice associata rispetto alla basi standard in arrivo e in partenza.

Esercizio 7.7. Sia W il piano di $\mathbb{R}^3$ definito da $x+y-2z = 0$ e sia $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+3z\\x-y\end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in W$$

Si scelga una base di W e si scriva la matrice associata a F rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo.

Esercizio 7.8 (Compito luglio 2017)**.** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $2x + z = 0$, sia E lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia $T : W \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\\y & x+2z\end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in W.$$

Sia inoltre $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$S\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in W \quad \text{e} \quad S\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

a) scegliere una base di W e una di E e scrivere la matrice associata a T rispetto a queste basi.
b) scrivere la matrice associata ad S rispetto alla basi standard di $\mathbb{R}^3$ ed E.

Esercizio 7.9 (Compitino febbraio 2017)**.** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x+y+z = 0$ e sia V il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in 1: $V = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} : p(1) = 0\}$. Sia $F : W \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da

$$F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x + 2\,y\,t + z\,t^2 + (x+z)t^3$$

(per esempio $F(1, -1, 0)$ è il polinomio $1 - 2t + t^3$)

a) Si scelga una base di W e una di V e si scriva la matrice associata a F rispetto a queste basi.
b) Sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ l'applicazione lineare tale che

$$G\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 + t \qquad \text{e} \qquad G\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in W.$$

Scrivere la matrice associata a G rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$.

Esercizio 7.10. Sia data la seguente matrice 2×2:

$$M = \begin{pmatrix}4 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

(1) si determini un vettore non nullo v_1 di $\mathbb{R}^2$ tale che $L_M(v_1) = 2v_1$;
(2) si determini un vettore non nullo v_2 di $\mathbb{R}^2$ tale che $L_M(v_2) = 3v_2$;
(3) si calcoli M^{100}.

Esercizio 7.11 (Compito 5 giugno 2017)**.** Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Dire se esistono due basi u_1, u_2, u_3 e v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{v_1,v_2,v_3}$ è diagonale.
b) Dire se esiste una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $[F]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,v_3}$ è diagonale.

8. Sistemi lineari

Esercizio 8.1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2\,x_2 + 2\,x_3 + 6\,x_4 + x_5 = 7 \\ 2\,x_1 + x_2 + 7\,x_3 + 11\,x_4 = 4 \\ x_1 + 3\,x_3 + 4\,x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

(1) Scrivere la matrice e la matrice completa associate al sistema lineare
(2) Ridurre la matrice a scalini.
(3) Calcolare il rango della matrice associata e della matrice completa
(4) Descrivere le soluzioni del sistema

Esercizio 8.2. Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = c^2 + 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = c^2 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

(1) calcolare il rango della matrice associata al sistema
(2) calcolare il rango della matrice completa associata al sistema
(3) per quali c il sistema ha soluzione? e quando ha soluzione quante soluzioni ha?

Esercizio 8.3. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determini una base di $N(L_A)$.

Esercizio 8.4. Sia A una matrice $m \times n$. Si dimostri che esiste una matrice B tale che $AB = Id$ se e solo se $rango(A) = m$ [molto simile al caso delle matrici invertibili fatto in classe]

Esercizio 8.5. Si calcoli l'inversa, se esiste, delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8.6. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Si determini una base di W, e si calcoli la dimensione di W e si descriva W tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in W:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Per i vettori w_i che stanno in W si determinino le cordinate rispetto alla base scelta

Esercizio 8.7. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{C}^5$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Si determini una base di W, e si calcoli la dimensione di W e si descriva W tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in W:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2i+1 \\ -1 \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}$$

Esercizio 8.8 (Compitino febbraio 2016)**.** Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $L_k : V \longrightarrow V$ definita da

$$L_k\big(p(t)\big) = p(t+1) - k\,p(t)$$

per ogni polinomio $p(t)$.

a) Si scelga una base di V e si determini la matrice associata ad L_k rispetto a tale base;
b) Si determini il rango di L_k al variare del parametro k;
c) Sia $f(t)$ il polinomio $f(t) = t^2 + 1$ si determini al variare di k se esistono polinomi $p(t)$ tali che $L_k\big(p(t)\big) = f(t)$.

9. Teorema fondamentale, dimensione

Esercizio 9.1. Sia $u = (1, 2, 3)$ e sia $U = \mathbb{R}u$. Sia W il piano $3x - z = 0$. Trovare una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che

- v_1 è una base di U,
- v_1, v_2 è una base di W.

Esercizio 9.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $W_1 \subset W_2 \subset \cdots W_n$ una successione di sottospazi di V tali che $\dim W_i = i$. Dimostrare che esiste una base $v_1, \ldots, v_n$ di V tale che per ogni i, i vettori $v_1, \ldots, v_i$ sono una base di W_i.

Esercizio 9.3. Siano U e W due spazi vettoriali di dimensione finita e sia $V = U \times W$ lo spazio vettoriale descritto nell'esercizio 4.3. Dimostrare che $\dim V = \dim U + \dim W$.

Esercizio 9.4. Esiste una applicazione lineare da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^2$ iniettiva? e una surgettiva?

Esercizio 9.5 (Compitino febbraio 2017)**.** a) Si enunci il teorema della dimensione.
b) Esistono due applicazioni lineari

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che la loro composizione $g \circ f$ sia iniettiva? Motivare la risposta.

Esercizio 9.6. Siano $F : U \longrightarrow V$ e $G : V \longrightarrow W$ due applicazioni lineari. Si dimostri che $rango\, G \circ F \leqslant rango\, F$ e che $rango\, G \circ F \leqslant rango\, G$.

10. Descrizione di sottospazi, somma e intersezione di sottospazi

Esercizio 10.1. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle equazioni:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0.$$

Descrivere W in forma parametrica.

Esercizio 10.2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si descriva W in forma parametrica e in forma cartesiana.

Esercizio 10.3. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ il sottospazio descritto dalla parametrizzazione $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$F\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s + t \\ t - s \\ 2t + 3s \end{pmatrix}$$

(1) si verifichi che F è una parametrizzazione (cioè che F è iniettiva);
(2) si determini una base di W;
(3) si descriva W in forma cartesiana.

Esercizio 10.4. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si descrivano $\operatorname{Im} L_A$ e $N(L_A)$ in forma parametrica e in forma cartesiana.

Esercizio 10.5 (I compitino 2015-2016)**.** Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$. Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A) $\dim(U + W) = 8$ qualsiasi siano U e W.
B) $\dim(U \cap W) = 2$ qualsiasi siano U e W.
C) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 8$.
D) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.
E) Se $\dim U + W = 8$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.

Esercizio 10.6 (Compito luglio 2017)**.** Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare con $\dim N(T) = 1$ e sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 4

a) dimostrare che $W \cap \operatorname{Im}(T) \neq 0$;
b) quali sono le possibili dimensioni di $W \cap \operatorname{Im}(T) \neq 0$? motivare la risposta

Esercizio 10.7 (Compito 6 giugno 2016)**.** Siano V e W due sottospazi di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$. Quali sono le possibili dimensioni del sottospazio $V \cap W$? Motiva la risposta in modo completo.

Esercizio 10.8. Siano U e W due sottospazi di V. Si dimostri che se $U \cup W$ è un sottospazio allora $U \subset W$ o $W \subset U$.

Esercizio 10.9. Siano U, V, W dei sottospazi dello spazio vettoriale E in somma diretta. Sia $u_1, \ldots, u_a$ una base di U, $v_1, \ldots, v_b$ una base di V, $w_1, \ldots, w_c$ una base di W. Dimostrare che $u_1, \ldots, u_a, v_1, \ldots, v_b, w_1, \ldots, w_c$ è una base di $U + V + W$. [La dimostrazione è del tutto analoga a quella fatta in classe nel caso di due soli sotospazi]

Esercizio 10.10. Sia $W = \{x \in \mathbb{C}^5 \,:\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$. Si trovino tre sottospazi X e Y e Z diversi da zero, di W tali che $W = X \oplus Y \oplus Z$.

Esercizio 10.11. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e sia X, Y, Z dei sottospazi di dimensione 3 di V. Sia $a = \dim X \cap Y$, $b = \dim X \cap Z$, $c = \dim Y \cap Z$ e $d = \dim X \cap Y \cap Z$.

(1) si dimostri che $a = 2$ o 3;
(2) si dimostri che non può essere $d = 0$;

(3) di esibiscano X, Y, Z tali che $d = 2$;
(4) di esibiscano X, Y, Z tali che $d = 1$;
(5) si descrivano tutte le quadruple (a, b, c, d) che si possono ottenere al variare di X, Y, Z.

Esercizio 10.12 (Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018)**.** Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4\,x_3 - x_4 = 0 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 + 11\,x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Calcolare la dimensione di U e V.
b) Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$.

Esercizio 10.13. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\\0\end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\\0\end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato da u_1, u_2, u_3 e W il sottospazio generato da w_1, w_2, w_3.
(1) Si descriva una base di $U + W$;
(2) Si descriva una base di $U \cap W$;
(3) Si descriva $U + W$ in forma cartesiana;
(4) Si descriva $U \cap W$ in forma cartesiana.

11. Determinanti

Esercizio 11.1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici, riducendole a scalini:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&1\\1&1&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&-1&3\\3&5&4\\0&5&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&5&1&0\\1&1&1&0\\7&1&0&2\end{pmatrix}$$

Esercizio 11.2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici applicando la formula di Laplace

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&5&1\\1&2&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&-1&1\\3&0&4\\0&5&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1&3&0\\1&0&1&2\\3&2&1&0\\1&1&0&2\end{pmatrix}$$

Esercizio 11.3. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant n-1}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o oguale a $n-1$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Si consideri la seguente applicazione lineare $F : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$$F(p(t)) = (p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots p(\lambda_n))$$

Si dimostri che è iniettiva se e solo se i numeri λ_i sono distinti. Se ne deduca che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\ & \ldots & & & & \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \ldots & \lambda_i^{n-2} & \lambda_i^{n-1} \\ & \ldots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se due dei numeri λ_i sono uguali.

Esercizio 11.4 (I compitino 2016)**.** Sia B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriali delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $T : E \longrightarrow E$ l'applicazione definita da $T(X) = B \cdot X$. Si calcoli il determinante di T.

Esercizio 11.5. Sia M la matrice a blocchi:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

con A matrice $p \times p$, D matrice $q \times q$ e B matrice $p \times q$. Dimostrare che $\det M = \det A \cdot \det D$ seguendo i seguenti passi:

(1) Dimostrare che se A non è invetibile allora non lo è neppure M e quindi $\det M = 0$;
(2) Se A è invertibile dimostrare che

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e applicare il teorema di Binet.
(3) Calcolare i determinanti delle tre matrici che compaiono nella formula precedente.

12. Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità

Esercizio 12.1. Sia V uno spazio vettoriale complesso. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che $F^4 = Id$. Si dimostri che se λ è un autovalore di F allora $\lambda^4 = 1$

Esercizio 12.2. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare e sia $\sqrt{2}$ un autovalore di F. Si dimostri che 6 è un autovalore di $F^4 + F^2$.

Esercizio 12.3. Si calcolino gli autovalori delle applicazioni L_A associate alle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 12.4. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione diagonalizzabile. Si dimostri che F^2 è diagonalizzabile e che $2F$ è diagonalizzabile.

Esercizio 12.5. Sia A una matrice 5×5 triangolare superiore che ha lungo la diagonale tutte le entrate uguali a 2. Si dimostri che A è diagonalizzabile se e solo se $A = 2\,I$.

Esercizio 12.6 (Compito 9 gennaio 2017)**.** Sia V uno spazio vettoriale sui numeri complessi di dimensione finita e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Sia λ un autovalore di F. Si dia la definizione di molteplicità geometrica e molteplicità algebrica di λ rispetto a F.
b) Supponiamo che $\dim V = 4$. Si dimostri che se la molteplicità geometrica di 2 è uguale a 4 allora $F = 2\,Id$.

Esercizio 12.7. Sia V uno spazio vettoriale e sia $F : V \longrightarrow V$ tale che $F^2 = F$. Dimostrare che F è diagonalizzabile. [Dimostrare che $V_0 \oplus V_1 = V$ direttamente]

Esercizio 12.8 (I compitino 2017)**.** Sia A la matrice 13×13 con tutte le entrate uguali a 1.

a) Si determini una base del nucleo di L_A.
b) Si determini un autovettore con autovalore diverso da zero (si provi ad indovinare!).
c) Si determini una base di autovettori per L_A e si calcoli il polinomio caratteristico di L_A.

Esercizio 12.9. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti complessi. Si consideri l'applicazione lineare $F : V \longrightarrow V$ definita nel seguente modo:

$$F(p(t)) = p(0)x^2 + p'(x)$$

a) Si determinino gli autovalori di F.
b) Si determini una base di autovettori.
c) Si calcoli F^{15}

Esercizio 12.10. Costruisci una matrice A di taglia 3×3 tale che l'applicazione $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfi entrambe le proprietà seguenti:

- l'immagine di L_A è il piano definito da $x + y = 0$;
- l'endomorfismo L_A non è diagonalizzabile.

Esercizio 12.11 (II compitino 2016)**.** Determinare per quali valori $t \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} t-1 & 2t & t \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2 & t+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 12.12 (Compito 6 giugno 2016)**.** Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Data una matrice A, consideriamo l'applicazione lineare $T_A \colon M(2) \to M(2)$ seguente:

$$T_A(X) = AX.$$

(1) Dimostra che T_A è diagonalizzabile nel caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Più in generale, dimostra che A è diagonalizzabile se e solo se T_A è diagonalizzabile.

Esercizio 12.13 (Compito 27 giugno 2016)**.** Sia $n \geqslant 0$ un numero naturale fissato e $\mathbb{R}_n[x]$ lo spazio di tutti i polinomi di grado al più n. Considera l'endomorfismo $T \colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ definito come

$$T(p) = (x+1)p'$$

dove p' è la derivata del polinomio p.

(1) Determina gli autovalori di T.
(2) L'endomorfismo T è diagonalizzabile? Motiva la risposta.

Esercizio 12.14 (Compito 18 luglio 2016)**.** Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 nella variabile x. Sia $T : V \longrightarrow V$ l'applicazione definita da

$$T(p(x)) = p(0)x^3 + p'(x).$$

a) Si calcoli il polinomio caratteristico di T e si dica se T è diagonalizzabile.
b) Si determini T^{20}.

Esercizio 12.15 (Compito 8 settembre 2016)**.** Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia $T \colon M(2) \to M(2)$ l'endomorfismo definito nel modo seguente:

$$T(X) = AX - XA.$$

(a) Calcola la dimensione dell'immagine di T.
(b) L'endomorfismo T è diagonalizzabile? Motiva la risposta.
(c) Dimostra che per qualsiasi altra scelta della matrice A iniziale la dimensione dell'immagine di T è sempre minore o uguale a 3.
(d) Dimostra che per qualsiasi altra scelta della matrice A iniziale la dimensione dell'immagine di T è sempre minore o uguale a 2.

Esercizio 12.16 (Compito 9 gennaio 2017)**.** Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matrice invertibile. Si considerino le applicazione lineari $F_A, G_A : V \longrightarrow V$ definite da

$$F_A(X) = AXA^{-1} \qquad \text{e} \qquad G_A(X) = AX - XA.$$

a) Si calcoli il polinomio caratteristico di F_A e G_A nel caso in cui $a = 1, b = c = 0, d = 2$.
b) Si dimostri che l'autospazio relativo all'autovalore 1 per l'applicazione F_A è uguale all'autospazio relativo all'autovalore 0 per G_A.

Esercizio 12.17 (Compito 26 giugno 2017)**.** Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale formato da tutti i polinomi in x di grado al massimo due. Considera l'endomorfismo $F\colon V \to V$ dato da

$$F(p) = p' + 4x^2p(0)$$

dove p' indica la derivata di p.

a) L'endomorfismo F è diagonalizzabile?
b) Considera lo stesso endomorfismo F definito sui complessi, cioè con $V = \mathbb{C}_2[x]$. È diagonalizzabile?
c) Nelle domande precedenti, nei casi in cui sia diagonalizzabile, trova una base di autovettori.

Esercizio 12.18 (Compito 1 settembre 2017)**.** Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) È vero che se $F^2 = Id$ allora F è diagonalizzabile?
b) È vero che se $F^2 = -Id$ allora F è diagonalizzabile?
c) È vero che se $F^2 = 0$ allora F è diagonalizzabile?

motivare la risposta con una dimostrazione nel caso sia diagonalizzabile o con un controesempio in caso contrario.

Esercizio 12.19 (Compitino 26 febbraio 2018)**.** Sia A la seguente matrice 7×7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare rango, determinante e traccia di A;
b) Trovare un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^7$ tale che $A \cdot v = v$;
c) Determinare il polinomio caratteristico di A e dire se A è diagonalizzabile.

Di seguito trovate gli esercizi dei compitini del primo semestre degli anni passati. Il programma del primo semestre cambia leggermente da anno in anno quindi potrebbe essere che non conosciate qualche definizione o qualche risultato che viene richiesto per svolgere gli esercizi.

A Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2016: prima parte

Istruzioni: Avete 30 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo il risultato o la lettera della risposta corretta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Sia $z = 1 + i$ e $w = 2 + i$. Calcolare z/w.

Risposta: $z/w =$

Domanda 2. Calcolare il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risposta: $\det A =$

Domanda 3. Sia $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ una applicazione lineare di rango 3. Determinare la dimensione del nucleo di L.

Risposta: $\dim \ker L =$

Domanda 4. Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$. Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A) $\dim(U + W) = 8$ qualsiasi siano U e W.
B) $\dim(U \cap W) = 2$ qualsiasi siano U e W.
C) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 8$.
D) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.
E) Se $\dim U + W = 8$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.

Risposta: L'affermazione sicuramente vera è la

Domanda 5. Si determini la dimensione dello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_{5\times 3}(\mathbb{R})$

Risposta: La dimensione di $\mathrm{Mat}_{5\times 3}(\mathbb{R})$ è uguale a

Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2016: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Si definisca cosa è $\ker T$, il nucleo di T.
b) Si dimostri che se $\ker T = \{0\}$ allora T è iniettiva.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $L_k : V \longrightarrow V$ definita da

$$L_k\big(p(t)\big) = p(t+1) - k\,p(t)$$

per ogni polinomio $p(t)$.

a) Si scelga una base di V e si determini la matrice associata ad L_k rispetto a tale base;
b) Si determini il rango di L_k al variare del parametro k;
c) Sia $f(t)$ il polinomio $f(t) = t^2 + 1$ si determini al variare di k se esistono polinomi $p(t)$ tali che $L_k\big(p(t)\big) = f(t)$.

Esercizio 3. Sia B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriali delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $T : E \longrightarrow E$ l'applicazione definita da $T(X) = B \cdot X$

a) Si determinino nucleo e immagine di T.
b) Si determini una base di E e si calcoli la matrice associata a T rispetto a questa base.
c) Si calcoli il determinante di T.

Esercizio 4. Sia C la matrice

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini un vettore non nullo $v_1 \in \mathbb{R}^2$ tale che $C \cdot v_1 = 3v_1$.
b) Si determini un vettore non nullo $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tale che $C \cdot v_2 = -9\, v_2$.
c) Si calcoli C^{100}.

A Compitino di algebra lineare del 21 febbraio 2017: prima parte

Istruzioni: Avete 25 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente a tutte e 5 le domande.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Si determinino tutti i numeri complessi z tali che $|z|^2 = 2$ e $Re(z) = Im(z)$.

Risposta:

Domanda 2. Si calcoli il polinomio caratteristico della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Risposta: $p_A(t) =$

Domanda 3. Sia data la seguente base di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ la base duale. Si calcoli φ_2.

Risposta: $\varphi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ una applicazione lineare tale che $\dim N(F) = 2$. Calcolare il rango di F.

Risposta: rango $(F) =$

Domanda 5. Siano U e W sottospazi dello spazio vettoriale V delle matrici 2×2: $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}$. Se $U + W = V$, $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim W = 2$ quale è la dimensione di U?

Risposta: $\dim U =$

Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2017: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

a) Si enunci il teorema della dimensione.

b) Esistono due applicazioni lineari
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
tali che la loro composizione $g \circ f$ sia iniettiva? Motivare la risposta.

Esercizio 2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + y + z = 0$ e sia V il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in 1: $V = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} \, : \, p(1) = 0\}$. Sia $F : W \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da
$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2\,y\,t + z\,t^2 + (x + z)t^3$$
(per esempio $F(1, -1, 0)$ è il polinomio $1 - 2t + t^3$)

a) Si scelga una base di W e una di V e si scriva la matrice associata a F rispetto a queste basi.

b) Sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ l'applicazione lineare tale che
$$G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + t \qquad \text{e} \qquad G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\; \text{se} \;\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$
Scrivere la matrice associata a G rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$.

Esercizio 3. Si determinino tutti gli z complessi tali che $z^4 \bar{z} = 32$.

Esercizio 4. Sia A la matrice 13×13 con tutte le entrate uguali a 1.

a) Si determini una base del nucleo di L_A.

b) Si determini un autovettore con autovalore diverso da zero (si provi ad indovinare!).

c) Si determini una base di autovettori per L_A e si calcoli il polinomio caratteristico di L_A.

AAA Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati e le lettere ABB. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente a tutte e 5 le domande.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia P il punto di coordinate $(1,1,2)$, Q il punto di coordinate $(-1,2,1)$ e O l'origine. Sia α l'angolo POQ. Calcolare $\cos\alpha$.

Risposta: $\cos\alpha =$

Domanda 2. Sia A la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det(A)$.

Risposta: $\det(A) =$

Domanda 3. Sia $z = 2+3i$ e $w = 1+i$. Calcolare la parte reale di z/w.

Risposta: $Re(z/w) =$

Domanda 4. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Descrivere W mediante una equazione lineare $ax+by+cz=0$.

Risposta:

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare suriettiva, $W \subset \mathbb{R}^8$ un sottospazio di dimensione 6 e $U = W \cap N(F)$. Sapendo che $N(F) + W = \mathbb{R}^8$ calcolare $\dim U$. [con $N(F)$ indico il nucleo di F]

Risposta: $\dim U =$

Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Mettete il vostro nome su tutti i fogli. Consegnate sia la bella che la brutta che il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Se un foglio che consegnate non volete che sia corretto scriveteci “brutta” in cima. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

a) Dare la definizione di vettori linearmente indipendenti.
b) Fare un esempio di tre vettori u, v, w in $\mathbb{R}^3$ tali che presi a coppie siano linearmente indipendenti (ovvero che u, v siano linearmente indipendenti. u, w siano linearmente indipendenti, e che v, w siano linearmente indipendenti) ma che u, v, w siano linearmente dipendenti
c) Siano u, v, w elementi di uno spazio vettoriale. Supponiamo che u e v siano linearmente indipendenti. Dimostrare che se u, v, w sono linearmente dipendenti allora $w \in \langle u, v\rangle$.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4\,x_3 - x_4 = 0 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 + 11\,x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Calcolare la dimensione di U e V.
b) Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Sia $W = \{f \in V \,:\, f(1) = 0\}$ e sia $D : W \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da $D(f) = f'$. Per $a \in \mathbb{R}$ sia $F_a : V \longrightarrow V$ l'applicazione linerare tale che

$$F_a(f) = D(f) \qquad \text{per ogni } f \in W \quad \text{ e } \quad F_a(1) = a(t-1).$$

a) Scegliere una base per W e scrivere la matrice associata a D rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo;
b) Per quali valori di a l'applicazione F_a è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Sia A la seguente matrice 7×7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare rango, determinante e traccia di A;
b) Trovare un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^7$ tale che $A \cdot v = v$;
c) Determinare il polinomio caratteristico di A e dire se A è diagonalizzabile.