Compito di Geometria e algebra lineare di martedì 7 gennaio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Sia $z = 2 - 2i$. Calcolare modulo e argomento di z.

$\|z\| =$ $\qquad\qquad$ $arg(z) =$

Domanda 2. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente applicazione è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2+a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

È diagonalizzabile per t

Domanda 3. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $e_1 + e_5, e_2 + e_5, e_1 - e_2$ Sia $F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ tale che $N(F) \oplus W = \mathbb{R}^5$. Calcolare il rango di F

$rango(F) =$

Domanda 4. Sia u_1, u_2, u_3 una base di uno spazio vettoriale V e sia $v \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $[v]_{u_1,u_2,u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora u_1, u_2, v è una base di V;

B) I vettori u_1, u_2, u_3, v sono generatori dello spazio vettoriale V.

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia b un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ di segnatura $(1, 2, 0)$ Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Esiste un sottospazio di dimensione 2 sul quale b è definita negativa;

B) L'unico vettore isotropo è 0;

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia A una matrice 5×3 di rango 3 e siano v_1, v_2, v_3 le colonne di A. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti;

B) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni b;

C) Il nucleo di L_A ha dimensione 3.

Le frasi vere sono

Compito di Geometria e algebra lineare di martedì 7 gennaio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = -3 + 3i$. Calcolare modulo e argomento di z.

$\|z\| =$ $\qquad\qquad\qquad$ $arg(z) =$

Domanda 2. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente applicazione è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5+a & 0 \\ 0 & 0 & 5-a \end{pmatrix}$$

È diagonalizzabile per t

Domanda 3. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $e_1 + e_5, e_2 + e_5, e_1 - e_2$. Sia $F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ tale che $N(F) \oplus W = \mathbb{R}^5$. Calcolare il rango di F

$rango(F) =$

Domanda 4. Sia u_1, u_2, u_3 una base di uno spazio vettoriale V e sia $v \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) I vettori u_1, u_2, u_3, v sono generatori dello spazio vettoriale V.

B) Se $[v]_{u_1,u_2,u_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora u_1, u_2, v è una base di V;

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia b un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ di segnatura $(1, 2, 0)$ Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) L'unico vettore isotropo è 0;

B) Esiste un sottospazio di dimensione 2 sul quale b è definita negativa;

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia A una matrice 5×3 di rango 3 e siano v_1, v_2, v_3 le colonne di A. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Il sistema $A \cdot x = b$ ha soluzione per ogni b;

B) v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti;

C) Il nucleo di L_A ha dimensione 3.

Le frasi vere sono

Compito del 7 gennaio 2020: seconda parte. Avete 2 ore 5 minuti di tempo a disposizione. Motivate le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Siano V e W due $\mathbb{R}$ spazi vettoriali e sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare.

a) Com'è definita l'immagine di F?
b) Si dimostri che l'immagine di F è un $\mathbb{R}$-sottospazio vettoriale.

Esercizio 2. Si determini la forma di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & a-2 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{C}$.

Esercizio 3. Siano $p, q \subset \mathbb{R}^3$ le rette:

$$p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\} \qquad q = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\},$$

sia r la retta passante per $(1, 0, 1)$ e $(3, 2, 3)$ e sia s la retta passante per $(1, 4, 0)$ e $(1, 4, 1)$.

a) Determinare una isometria $F(x) = Ax + b$ tale che $F(p) = r$ e $F(q)$ intersechi s
b) Esiste una isometria che porta p in r e q in s? Motivare la risposta.

Esercizio 4. Sia C la quadrica di $\mathbb{R}^3$ definita dall'equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Sia W il piano di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + y + z + 1 = 0$. Si determini il tipo di conica di $C \cap W$.

Soluzioni compito 7 gennaio 2020 prima parte: versione 1

Domanda 1. $\|z\| = 2\sqrt{2}$, $arg(z) = -\pi/4$;

Domanda 2. $a \neq \pm 2$;

Domanda 3. $rango(F) = 2$;

Domanda 4. B

Domanda 5. A

Domanda 6. A

Soluzioni compito 7 gennaio 2020 prima parte: versione 2

Domanda 1. $\|z\| = 3\sqrt{2}$, $arg(z) = 3\pi/4$;

Domanda 2. $a \neq \pm 5$;

Domanda 3. $rango(F) = 2$;

Domanda 4. A

Domanda 5. B

Domanda 6. B

Soluzioni compito 7 gennaio 2020 seconda parte

Esercizio 1. a)

$$Im(F) = \{F(v) \,:\, v \in V\}$$

oppure anche $Im(F) = \{w \in W \,:\, \text{esiste } v \in V \text{ tale che } F(v) = w\}$.

b)Sia $U = \mathrm{Im}(F)$. Dobbiamo verificare le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi vettoriali.

1) $0 \in U$. Infatti $0 \in V$ e $F(0) = 0$ poiché F è lineare. Quindi $O \in U$.

2) Se $w_1, w_2 \in U$ allora $w_1 + w_2 \in U$. Infatti siano v_1 e $v_2 \in V$ tali che $F(v_1) = w_1$ e $F(v_2) = w_2$. Allora $w_1 + w_2 = F(v_1 + v_2)$ poiché F è lineare. Quindi $w_1 + w_2 \in U$.

3) Se $w \in U$ λ in $\mathbb{R}$ allora $\lambda v \in U$. Infatti siano $v \in V$ tale che $F(v) = w$. Allora $\lambda w = F(\lambda v)$ poiché F è lineare. Quindi $\lambda w \in U$.

Esercizio 2. Il polinomio caratteristico della matrice A è uguale a

$$p_A(t) = (a-t)(t^2-(a+1)+a) = (a-t)(a-t)(1-t)$$

Se $a \neq 1$ questo polinomio caratteristico ha l'autovalore a con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 1. Calcoliamo la molteplicità geometrica di a. Dobbiamo calcolare la dimesione del nucleo della matrice

$$A - aI = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2 e quindi la molteplicià geometrica di a è 1. Quindi c'è un unico blocco di Jordan relativo ad a e la forma di Jordan della matrice è:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se invece $a = 1$ abbiamo che 1 ha molteplicità algebrica 3. La molteplcitità geometrica è data dalla dimensione del nucleo della matrice

$$A - aI = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi è 1. Quindi per $a = 1$ la matrice ha un unico blocco di Jordan e la forma di Jordan è la seguente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. a) Osserviamo che le due rette p e r sono parallele, infatti hanno entrambe direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quindi se Q è un punto di r e P è un punto di p e $u = Q - P$ la traslazione τ_u porta p in r. Scegliamo P e Q in modo che l'intersezione tra $\tau_u(q)$ e s sia non vuota. Fissiamo

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1+a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad u = \begin{pmatrix} a \\ a-2 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\tau_u(q) = \left\{ \begin{pmatrix} 2+a \\ a \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Quindi cerchiamo a in modo che esistano s, t tali che

$$\begin{pmatrix} 2+a+t \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ s \end{pmatrix}.$$

otteniamo $a = 4$, $s = 4$ e $t = -5$. Quindi la traslazione τ_u con $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ha le prorietà richieste.

b) Non esiste una isometria che porta p in r e q in s. Infatti le due coppie di rette hanno distanza diversa. Per calcolare la distanza tra le due rette posso usare formula vista a lezione:

$$dist(AB, CD) = \frac{|\det \begin{pmatrix} B-A & D-C & C-A \end{pmatrix}|}{\|(B-A) \times (D-C)\|}.$$

In particolare la distanza tra p e q è uguale a

$$d = \frac{|det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}|}{\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

mentre la distanza tra s e r è uguale a

$$d = \frac{\left|det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = 2\sqrt{2}$$

Esercizio 4. Per studiare il tipo di conica di C posso studiare le segnatura del prodotto scalare associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e della sua restrizione al piano all'infinito ovvero al piano U di equazione $x + y + z = 0$. La segnatura del prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ è $(2, 1, 0)$. Se come base di U scegliamo $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -1)$ la matrice associata alla restrizione è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha segnatura $(1, 1, 0)$. Quindi si tratta di un'iperbole.