Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 17 febbraio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = 3 + 3i$ e $w = 1 + 3i$. Calcolare z/w. Scriverlo in forma cartesiana.

$z/w =$

Domanda 2. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ l'applicazione lineare

$$F(p) = p(1)t^2 + p'(t+1) \ .$$

Si scriva la matrice associata a F rispetto alle basi standard in partenza e in arrivo.

$[F]_{1,t,t^2}^{1,t,t^2,t^3}$

Domanda 3. Sia W il piano di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + 2y + z = 0$. Sia $P = (1, 1, 1)$ e sia Q il suo simmetrico rispetto al piano W. Determinare le coordinate di Q.

$Q =$

Domanda 4. Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere:

A) Se $\dim U = 3$ e $U \cap W = \{0\}$ allora $\dim W \leqslant 2$.
B) Se $\dim U = 3$ e $\dim W = 3$ allora $\dim U \cap W \geqslant 2$.

Le frasi vere sono

Domanda 5. Sia F una isometria affine di $\mathbb{R}^3$ che fissa l'origine. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) F è una applicazione lineare.
B) $F \circ F$ è una isometria affine.

Le frasi vere sono

Domanda 6. Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e siano $u, v \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se u e v sono linearmente dipendenti allora $F(u)$ e $F(v)$ sono linearmente dipendenti.
B) Se u e v sono linearmente indipendenti allora $F(u)$ e $F(v)$ sono linearmente indipendenti.
C) Se $F(u)$ e $F(v)$ sono linearmente indipendenti allora u e v sono lineramente indipendenti

Le frasi vere sono

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 17 febbraio 2020: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 15 di tempo.

Esercizio 1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare.

a) Cosa vuol dire che F è diagonalizzabile?
b) Sia F la proiezione ortogonale su un piano W passante per l'origine. Dimostrare che è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ e sia

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'applicazione lineare $F : E \longrightarrow E$ definita da $F(X) = GXG^{-1}$. Determinare la forma di Jordan di F.

Esercizio 3. Sia $A = (0, 0, 0)$, $B = (4, 4, 0)$, $C = (0, 3, 3)$, $D = (4, -1, -1)$.Determinare una isometria $F(x) = Gx + b$ che porta il triangolo ABC nel triangolo ABD. (Determinare G e b).

Esercizio 4. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $g(x, y) = x^t Ay$ il prodotto scalare associato su $\mathbb{R}^3$.

a) Si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortogonale rispetto al prodotto scalare g.
b) Si determini una matrice M di determinante non nullo tale che MAM^t sia diagonale.

1. Soluzioni prima parte del compito del 17 febbraio 2020

Domanda 1. $\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$

Domanda 2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda 3. $Q = (-1/3, -5/3, -1/3)$.

Domanda 4. A.

Domanda 5. A,B.

Domanda 6. A,C.

2. Soluzioni seconda parte del compito del 17 febbraio 2020

Esercizio 1. a) F è diagonalizzabile se esiste una base di autovettori.

b) Sia v_1, v_2 una base di W e sia $v_3 \neq 0$ un vettore ortogonale a W. Allora v_1, v_2, v_3 è una base di $\mathbb{R}^3$ e $F(v_1) = v_1$, $F(v_2) = v_2$ e $F(v_3) = 0$ quindi è una base di autovettori.

Esercizio 2. La matrice associata a F rispetto alla base standard di E è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è $(t-1)^4$. Inoltre il rango di $A - I$ è uguale a 2 e $(A-I)^2$ non è zero. Quindi la forma di Jordan è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. a) I due triangoli hanno un lato in comune. Possiamo quindi scegliere una qualsiasi isometria che lascia fissa la retta AB e porta C in D. Va bene sia una rotazione attorno alla retta AB che una simmetria rispetto ad un piano che contiene la retta AB. Scegliamo la seconda opzione per la quale i calcoli si possono ipotizzare più semplici. Sia $\mathbb{R}u$ la retta ortogonale al piano rispetto al quale effettuiamo la simmetria che indicheremo con R. Avremo

$$D = C - 2\frac{u \cdot C}{u \cdot u}u.$$

Quindi u sarà un multiplo di $D - C = (4, -4, -4)$. Scegliamo $u = (1, -1, -1)$. In effetti B è sulla retta ortogonale a $\mathbb{R}u$ e quindi è fissato dalla simmetria e $R(C) = D$ come volevamo. Abbiamo

$$R(x, y, z) = (x, y, z) - 2\frac{x - y - z}{3}(1, -1, -1)$$

Quindi la matrice G associata a R rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

mentre $b = 0$

Esercizio 4. Sia g il prodotto scalare associato alla matrice A. Sia $v_1 = e_1$. L'ortogonale a v_1 rispetto al prodotto scalare g è dato dall'equazione

$$x + 2y = 0\ .$$

Scegliamo allora $v_2 = e_3$. L'ortogonale a v_1 e v_2 rispetto al prodotto scalare g è dato dalle equazioni

$$x + 2y = 0 \qquad \text{e} \qquad -3y + z = 0$$

Se scegliamo $y = 1$ otteniamo che $v_3 = -2e_1 + e_2 + 3e_3$ è ortogonale rispetto a g sia a v_1 che v_2. Nella base v_1, v_2, v_3 la matrice associata a g è diagonale, ovvero

$$[g]_{v_1,v_2,v_3} = \left([Id]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3}\right)^t [g]_{e_1,e_2,e_3}[Id]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3} = M\,A\,M^t$$

con $M = \left([Id]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3}\right)^t$ è una matrice diagonale. Essendo M la matrice associata ad un cambiamento di base ha sicuramente determinante non nullo. Infine

$$M = \left([Id]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$