italian italian

Compito di Geometria e algebra lineare di giovedì 12 settembre 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 30 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome o matricola sui sopra. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito.

Domanda 1. Scrivere in forma cartesiana il numero complesso $z = e^{1+i\frac{\pi}{4}}$.

Risposta: $z =$

Domanda 2. Sia A una matrice 3×3 non diagonalizzabile con polinomio caratteristico $2t^2 - t^3$. Scrivere la sua forma di Jordan.

Risposta: $A =$

Domanda 3. Sia g il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^3$ e $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ una applicazione lineare. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se T è autoaggiunto allora T ha determinante uguale a ± 1;
B) se T è autoaggiunto allora gli unici autovalori possibili della matrice associata a T sono 1 e -1;
C) se T è autoaggiunto allora esiste una base ortonormale di autovettori di T;
D) se $T = (1+2i)Id$ allora T è autoaggiunto;
E) se T è autoaggiunto allora $g(Te_1, e_2) = g(e_1, Te_2)$.

Le implicazioni vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^7 \longrightarrow V$ una applicazione lineare iniettiva. Sia $W = \text{Span}\{e_1+e_2+e_3, e_1+e_3, e_4\}$ e sia $\ker F \oplus W = \mathbb{R}^7$. Calcolare il rango di F.

Risposta: Il rango di F è

Domanda 5. Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione linerare tra due spazi vettoriali di dimensione finita; Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se $\dim V = 2$ allora $\dim \operatorname{Im} F \leqslant 2$;
B) se $V = W$ allora F è diagonalizzabile;
C) se $u \in \ker F$ e allora $u \in W$;
D) se $u, v \in V$ sono linearmente dipendenti allora $F(u), F(v)$ sono linearmente dipendenti;
E) se $\dim V = 6$ e $\dim W = 5$ allora F non è iniettiva.

Le frasi vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $u, v, w \in V$. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se u, v e w sono linearmente indipendenti allora $\dim V \geqslant 3$;
B) se u, v e w sono linearmente indipendenti e $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ allora $\alpha = \beta = \gamma = 0$;
C) se u, v e w sono linearmente indipendenti allora u e v sono linearmente indipendenti;
D) se $u = v = w = 0$ allora u, v, w sono linearmente indipendenti;
E) se $w = 2u + 2v$ allora u, v, w non sono lineramente indipendenti.

Le implicazioni vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Compito di Geometria e algebra lineare di giovedì 12 settembre 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 30 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome o matricola sui sopra. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito.

Domanda 1. Scrivere in forma cartesiana il numero complesso $z = e^{1-i\frac{\pi}{2}}$.

Risposta: $z =$

Domanda 2. Sia A una matrice 3×3 non diagonalizzabile con polinomio caratteristico $3t^2 - t^3$. Scrivere la sua forma di Jordan.

Risposta: $A =$

Domanda 3. Sia g il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^3$ e $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ una applicazione lineare. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se T è autoaggiunto allora $g(Te_1, e_2) = g(e_1, Te_2)$.
B) se T è autoaggiunto allora gli unici autovalori possibili della matrice associata a T sono 1 e -1;
C) se $T = (1 + 2i)Id$ allora T è autoaggiunto;
D) se T è autoaggiunto allora T ha determinante uguale a ± 1;
E) se T è autoaggiunto allora esiste una base ortonormale di autovettori di T;

Le implicazioni vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow V$ una applicazione lineare iniettiva. Sia $W = \text{Span}\{e_1, e_1 - e_3, e_4, e_5, e_6\}$ e sia $\ker F \oplus W = \mathbb{R}^8$. Calcolare il rango di F.

Risposta: Il rango di F è

Domanda 5. Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione linerare tra due spazi vettoriali di dimensione finita; Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se $u, v \in V$ sono linermente dipendenti allora $F(u), F(v)$ sono linearmente dipendenti;
B) se $\dim V = 2$ allora $\dim \text{Im}\, F \leqslant 2$;
C) se $u \in \ker F$ e allora $u \in W$;
D) se $V = W$ allora F è diagonalizzabile;
E) se $\dim V = 6$ e $\dim W = 5$ allora F non è iniettiva.

Le frasi vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $u, v, w \in V$. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se $u = v = w = 0$ allora u, v, w sono linearmente indipendenti;
B) se u, v e w sono linearmente indipendenti e $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ allora $\alpha = \beta = \gamma = 0$;
C) se u, v e w sono linearmente indipendenti allora u e v sono linearmente indipendenti;
D) se $w = 2u + 2v$ allora u, v, w non sono lineramente indipendenti;
E) se u, v e w sono linearmente indipendenti allora $\dim V \geqslant 3$.

Le implicazioni vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Compito di Geometria e algebra lineare di giovedì 12 settembre 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 30 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome o matricola sui sopra. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito.

Domanda 1. Scrivere in forma cartesiana il numero complesso $z = e^{2+i\frac{\pi}{4}}$.

Risposta: $z =$

Domanda 2. Sia A una matrice 3×3 non diagonalizzabile con polinomio caratteristico $-t^2 - t^3$. Scrivere la sua forma di Jordan.

Risposta: $A =$

Domanda 3. Sia g il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^3$ e $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ una applicazione lineare. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se $T = (1 + 2i)Id$ allora T è autoaggiunto;
B) se T è autoaggiunto allora gli unici autovalori possibili della matrice associata a T sono 1 e -1;
C) se T è autoaggiunto allora $g(Te_1, e_2) = g(e_1, Te_2)$.
D) se T è autoaggiunto allora esiste una base ortonormale di autovettori di T;
E) se T è autoaggiunto allora T ha determinante uguale a ± 1;

Le implicazioni vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^9 \longrightarrow V$ una applicazione lineare iniettiva. Sia $W = \mathrm{Span}\{e_1, e_1 + 2e_2, e_5, e_7\}$ e sia $\ker F \oplus W = \mathbb{R}^9$. Calcolare il rango di F.

Risposta: Il rango di F è

Domanda 5. Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione linerare tra due spazi vettoriali di dimensione finita; Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se $V = W$ allora F è diagonalizzabile;
B) se $\dim V = 2$ allora $\dim \mathrm{Im}\, F \leqslant 2$;
C) se $u, v \in V$ sono linermente dipendenti allora $F(u), F(v)$ sono linearmente dipendenti;
D) se $\dim V = 6$ e $\dim W = 5$ allora F non è iniettiva.
E) se $u \in \ker F$ e allora $u \in W$.

Le frasi vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $u, v, w \in V$. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se u, v e w sono linearmente indipendenti allora u e v sono linearmente indipendenti;
B) se u, v e w sono linearmente indipendenti allora $\dim V \geqslant 3$;
C) se $u = v = w = 0$ allora u, v, w sono linearmente indipendenti;
D) se u, v e w sono linearmente indipendenti e $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ allora $\alpha = \beta = \gamma = 0$;
E) se $w = 2u + 2v$ allora u, v, w non sono lineramente indipendenti.

Le implicazioni vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Compito di Geometria e algebra lineare di giovedì 12 settembre 2019

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 30'.

Esercizio 1.

a) Dare la definizione di endomorfismo autoaggiunto ed enunciare il teorema spettrale;

b) Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard e supponiamo che gli autovalori di T siano $1, 2, 3$. Sia $v \in \mathbb{R}^3$ e sia $\|v\| = 1$. Dimostrare che $\|T(v)\| \leqslant 3$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Sia

$$U = \operatorname{Span}\{t^2 - 2t, t^2 - t - 1, (t-1)^3\}$$

e sia

$$W = \{f \in V : f(0) = f(1) = f(2) = 0\}$$

Calcolare le dimensioni di $U \cap W$ e $U + W$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice dipendente da un parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & k-2 \\ k+1 & 1 & 2k-1 \\ 0 & k & -k \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori $k \in \mathbb{R}$ la matrice ha autovalore $\lambda = 2$. Per i valori k trovati, determinare se A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Considerare le rette

$$r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(1) Determinare la retta s ortogonale a r_1 e r_2. Si scriva s in forma parametrica e si individuino i punti $s \cap r_1$ e $s \cap r_2$.

(2) Determinare il piano π parallelo ad entrambe le rette r_1 e r_2 ed equidistante da queste. Si scriva π in forma cartesiana.

(3) Determinare una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r_1) \cap r_2 \neq \emptyset$ e $f(r_2) \cap r_1 \neq \emptyset$.

Risposte

Risposta 1. $z = \frac{e}{\sqrt{2}} + i\frac{e}{\sqrt{2}}$.

Risposta 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Risposta 3. C,E

Risposta 4. 3

Risposta 5. A,D,E

Risposta 6. A,B,C,E

Risposte

Risposta 1. $z = -i\,e$.

Risposta 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Risposta 3. A,E

Risposta 4. 5

Risposta 5. A,B,E

Risposta 6. B,C,D,E

Risposte

Risposta 1. $z = \frac{e^2}{\sqrt{2}} + i\frac{e^2}{\sqrt{2}}$.

Risposta 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Risposta 3. C,D

Risposta 4. 4

Risposta 5. B,C,D

Risposta 6. A,B,D,E

Soluzioni

Esercizio 1. a) Definizione di applicazione autoaggiunta. Sia V uno spazio vettoriale e g un prodotto scalare o un prodotto hermitiano su V. Sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare. T si dice autoaggiunta rispetto a g se per ogni $u, v \in V$ si ha $g(Tu, v) = g(u, Tv)$.

Enunciato del teorema spettrale. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita. Sia g un prodotto hermitiano definito positivo su V e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare. Allora T è autoaggiunta se e solo se esiste una base ortonormale di autovettori.

b) Essendo T autoaggiunta esiste una base ortonormale di autovettori. Sia u_1, u_2, u_3 una tale base e sia u_i di autovalore i. Sia $v \in V$ e $\|v\| = 1$. Scriviamo v nella base u_i: $v = x\,u_1 + y\,u_2 + z\,u_3$.

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = 1 && \text{poiché gli } u_i \text{ sono ortonormali} \\ T(v) &= x\,u_1 + 2y\,u_2 + 3z\,u_3 && \text{poiché } T(u_i) = iu_i \\ \|T(v)\|^2 &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 && \text{poiché gli } u_i \text{ sono ortonormali} \end{aligned}$$

dove nell'ultima relazione abbiamo utilizzato anche la formula che la precede. Confrontando le formule per $\|v\|$ e $\|T(v)\|$ otteniamo $\|T(v)\|^2 \leqslant 9\|v\|^2 = 9$. Estraendo la radice quadrata otteniamo la tesi.

Esercizio 2. Calcoliamo innanzitutto le dimensioni di U e W. Esprimiamo i generatori di U nella base standard $1, \ldots, t^4$ di V. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{scambiando la prima e la terza riga e riducendo a scalini otteniamo} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che osserviamo avere rango 3. Quindi $\dim U = 3$ e i generatori proposti sono in realtà una base di U. Per calcolare la dimensione del secondo sottospazio osserviamo che W è lo spazio dei polinomi che si annullano in $0, 1, 2$ ovvero dei polinomi della forma

$$f(t) = t(t-1)(t-2)(at+b)$$

e quindi W ha dimensione 2 (questo lo abbiamo fatto varie volte a lezione, non c'era bisogno di specificare oltre). Per calcolare la dimensione di $U \cap W$ consideriamo l'applicazione $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $F(p) = (p(0), p(1), p(2))$ e osserviamo che $U \cap W = \ker F$. Nella base standard in arrivo e dei generatori di U proposti dall'esercizio in partenza, otteniamo che la matrice associata a F è

$$[F]_{e_1,e_2,e_3}^{t^2-2t, t^2-t-1, (t-1)^3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e riducendo a scalini otteniamo} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Dalla formula della dimensione otteniamo che

$$\dim U \cap W = \dim U - rango(F) = 3 - 2 = 1.$$

Infine dalla formula di Grassmann otteniamo che

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Esercizio 3. La matrice $A - 2I$ ha determinante $2k^2(k+1)$. Quindi 2 è autovalore per $k = 0$ e $k = -1$. Studiando separatamente questi valori si vede che A ha 3 autovalori distinti sia per $k = -1$ che per $k = 0$ e quindi è diagonalizzabile in entrambi i casi.

Esercizio 4. La retta è

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

I punti di intersezione con r_1 e r_2 sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Il piano π è quello ortogonale alla retta s nel punto medio del segmento AB. Il punto medio è

$$\begin{pmatrix} 5/6 \\ 5/6 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\pi = \{x + y - 2z = -1\}.$$

Come f basta prendere una riflessione rispetto a π. Si ottiene

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$