COMPITI E COMPITINI DELL'ANNO 2017

Le soluzioni degli esercizi sono in fondo al file.

Compito di Geometria e algebra lineare del 9 gennaio 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale sui numeri complessi di dimensione finita e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Sia λ un autovalore di F. Si dia la definizione di molteplicità geometrica e molteplicità algebrica di λ rispetto a F.
b) Supponiamo che $\dim V = 4$. Si dimostri che se la molteplicità geometrica di 2 è uguale a 4 allora $F = 2\,Id$.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matrice invertibile. Si considerino le applicazione lineari $F_A, G_A : V \longrightarrow V$ definite da

$$F_A(X) = AXA^{-1} \qquad \text{e} \qquad G_A(X) = AX - XA.$$

a) Si calcoli il polinomio caratteristico di F_A e G_A nel caso in cui $a = 1, b = c = 0, d = 2$.
b) Si dimostri che l'autospazio relativo all'autovalore 1 per l'applicazione F_A è uguale all'autospazio relativo all'autovalore 0 per G_A.

Esercizio 3. Sia r una riflessione di $\mathbb{R}^3$ rispetto ad un piano affine π che sposti il punto P di coordinate $(1, 1, 1)$ nel punto B di coordinate $(1, 3, 1)$. Dato un vettore $c \in \mathbb{R}^3$, sia inoltre $F_c : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'isometria definita da $F_c(v) = r(v) + c$.

a) Determinare il piano π.
b) Determinare la matrice A e il vettore b tali che $r(v) = A \cdot v + b$.
c) Determinare per quali $c \in \mathbb{R}^3$ l'isometria F_c è una riflessione rispetto ad un piano. Che tipo di isometria è negli altri casi?

Esercizio 4. Si consideri il fascio di coniche

$$x^2 + (1 - t)y^2 + 2tx - 2(1 - t)y + 2 - t = 0$$

dipendenti da un parametro reale $t \in \mathbb{R}$.

a) Per quali valori di t la conica è non vuota?
b) Per quali valori di t la conica è una ellisse? una parabola? una iperbole?
c) Determinare il centro della conica, per quei valori di t in cui esiste.
d) Per quali valori di t la conica è una circonferenza?

Compito di Geometria e algebra lineare del 27 gennaio 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo. Mostra che se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori per T con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tutti distinti, allora i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono indipendenti.

Esercizio 2. Costruisci una matrice A di taglia 3×3 tale che l'applicazione $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfi entrambe le proprietà seguenti:

- l'immagine di L_A è il piano definito da $x + y = 0$;
- l'endomorfismo L_A non è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il piano definito dall'equazione $2x + z = 0$. Sia $p_W : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su W rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ e sia $R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la rotazione attorno all'asse z di $\pi/4$ radianti. Sia infine $T : W \longrightarrow W$ l'applicazione definita da $T(w) = p_W(R(w))$.

a) Scrivi la matrice associata a R e a p_W rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
b) L'endomorfismo T è diagonalizzabile? Motivare la risposta.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale reale e g un prodotto scalare su V. Se W è un sottospazio di V indichiamo con $g_W : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ la restrizione di g a W ovvero il prodotto scalare di W definito da $g_W(w_1, w_2) = g(w_1, w_2)$ per ogni $w_1, w_2 \in W$.

a) Se g ha segnatura $(2, 2, 0)$ esiste un sottospazio W di dimensione 3 di V tale che g_W sia definito positivo? Motivare la risposta.
b) Se g ha segnatura $(2, 2, 0)$ esiste un sottospazio W di dimensione 3 di V tale che g_W abbia segnatura $(1, 1, 1)$? Motivare la risposta.

Compito di Geometria e algebra lineare del 15 febbraio 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale, sia g un prodotto scalare su V e $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare che sia una isometria rispetto al prodotto scalare g. Sia infine $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di T.

a) Dimostrare che se g è definito positivo allora $\lambda = \pm 1$;
b) L'affermazione precedente rimane vera se si assume che g abbia segnatura $(1, 1, 0)$?

Esercizio 2. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli A^{100}.

Esercizio 3. Sia U un piano affine (non necessariamente passante per l'origine) di $\mathbb{R}^3$ e sia P_U la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su U. Similmente se ℓ è una retta affine sia P_ℓ la proiezione di $\mathbb{R}^3$ su ℓ.

a) Trovare A e b tali che $P_U(x) = Ax + b$ nel caso in cui U sia il piano $x + y + z = 1$.
b) Trovare A e b tali che $P_\ell(x) = Ax + b$ nel caso in cui ℓ sia la retta passante per e_1 ed e_2.
c) Fissato U come nel punto a) esiste una retta ℓ tale che la trasformazione $F(v) = P_U(v) + P_\ell(v)$ sia una isometria affine?

Esercizio 4. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ e sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti reali. Siano q_1 e q_2 due prodotti scalari su V definiti nel modo seguente:

$$q_1(f, g) = f(a)g(a) + f'(b)g'(b) + f''(c)g''(c),$$
$$q_2(f, g) = f(a)g(a) + f(b)g(b) + f(c)g(c).$$

a) Calcolare la segnatura di q_1 al variare di a, b, c.
b) Per quali a, b, c il prodotto scalare q_2 è definito positivo?

A COMPITINO DI ALGEBRA LINEARE DEL 21 FEBBRAIO 2017: PRIMA PARTE

Istruzioni: Avete 25 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente a tutte e 5 le domande.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Si determinino tutti i numeri complessi z tali che $|z|^2 = 2$ e $Re(z) = Im(z)$.

Risposta:

Domanda 2. Si calcoli il polinomio caratteristico della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Risposta: $p_A(t) =$

Domanda 3. Sia data la seguente base di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ la base duale. Si calcoli φ_2.

Risposta: $\varphi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ una applicazione lineare tale che $\dim N(F) = 2$. Calcolare il rango di F.

Risposta: $rango\,(F) =$

Domanda 5. Siano U e W sottospazi dello spazio vettoriale V delle matrici 2×2: $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}$. Se $U + W = V$, $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim W = 2$ quale è la dimensione di U?

Risposta: $\dim U =$

B COMPITINO DI ALGEBRA LINEARE DEL 21 FEBBRAIO 2017: PRIMA PARTE

Istruzioni: Avete 25 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente a tutte e 5 le domande.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Si determinino tutti i numeri complessi z tali che $|z|^2 = 2$ e $Re(z) = -Im(z)$.

Risposta:

Domanda 2. Si calcoli il polinomio caratteristico della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Risposta: $p_A(t) =$

Domanda 3. Sia data la seguente base di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ la base duale. Si calcoli φ_2.

Risposta: $\varphi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{C}^5 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ una applicazione lineare tale che $\dim N(F) = 2$. Calcolare il rango di F.

Risposta: $rango\,(F) =$

Domanda 5. Siano U e W sottospazi dello spazio vettoriale V delle matrici 2×3: $V = \mathrm{Mat}_{2\times 3}$. Se $U + W = V$, $\dim(U \cap W) = 2$ e $\dim W = 3$ quale è la dimensione di U?

Risposta: $\dim U =$

Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2017: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

a) Si enunci il teorema della dimensione.

b) Esistono due applicazioni lineari

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che la loro composizione $g \circ f$ sia iniettiva? Motivare la risposta.

Esercizio 2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x+y+z=0$ e sia V il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in 1: $V = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} : p(1) = 0\}$. Sia $F : W \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2\,y\,t + z\,t^2 + (x+z)t^3$$

(per esempio $F(1,-1,0)$ è il polinomio $1 - 2t + t^3$)

a) Si scelga una base di W e una di V e si scriva la matrice associata a F rispetto a queste basi.

b) Sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ l'applicazione lineare tale che

$$G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + t \qquad \text{e} \qquad G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Scrivere la matrice associata a G rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$.

Esercizio 3. Si determinino tutti gli z complessi tali che $z^4\bar{z} = 32$.

Esercizio 4. Sia A la matrice 13×13 con tutte le entrate uguali a 1.

a) Si determini una base del nucleo di L_A.

b) Si determini un autovettore con autovalore diverso da zero (si provi ad indovinare!).

c) Si determini una base di autovettori per L_A e si calcoli il polinomio caratteristico di L_A.

Compitino di algebra lineare del 31 maggio 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia g un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Sia $U \subset V$ un sottospazio.

(1) Definisci $U^\perp$ e mostra che è un sottospazio vettoriale di V.

(2) Esibisci concretamente un caso in cui $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ ma U e $U^\perp$ non sono in somma diretta (devi scegliere V, g, U opportuni e espliciti).

Esercizio 2. Considera l'endomorfismo $L_A : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ dato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Determina due autovettori indipendenti per A.
(2) La matrice A è diagonalizzabile?
(3) Determina il polinomio minimo di A.
(4) Determina la forma di Jordan di A.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale formato dai polinomi reali di grado al massimo due. Considera il prodotto scalare g su V definito nel modo seguente:

$$g(p,q) = p(0)q(0) + p'(1)q'(1) - p''(-1)q''(-1)$$

dove p' e p'' indicano la derivata prima e seconda di p (e analogamente per q' e q'').

(1) Determina la segnatura di g.
(2) Esiste un sottospazio $W \subset V$ di dimensione 2 tale che la restrizione $g|_W$ abbia segnatura $(1,1,0)$?
(3) Esiste un sottospazio $W \subset V$ di dimensione 2 tale che la restrizione $g|_W$ abbia segnatura $(0,0,2)$?

Esercizio 4. Scrivi una isometria affine $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfi le proprietà seguenti:

(1) $f(\pi) = \pi$ dove π è il piano affine $\pi = \{x_1 = x_2\}$;
(2) f non ha punti fissi;
(3) $\det A = 1$ e $A \neq I$.

Se non riesci a risolvere l'esercizio in questo modo, puoi togliere l'ipotesi (2), cioè che f non abbia punti fissi. In questo caso l'esercizio svolto avrà un punteggio inferiore.

Compito di Geometria e algebra lineare del 5 giugno 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia b un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

a) Definire cosa è una applicazione ortogonale rispetto a b;
b) Dimostrare che se b è definito positivo e T è una trasformazione ortogonale rispetto a b allora gli autovalori di T sono uguali a ± 1;
c) L'affermazione precedente rimane vera se si assume soltanto che b sia non degenere?

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Svolgere 2 dei seguenti punti:

a) Calcolare la forma di Jordan di F;
b) Dire se esistono due basi u_1, u_2, u_3 e v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{v_1,v_2,v_3}$ è diagonale.
c) Dire se esiste una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $[F]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,v_3}$ è diagonale.

Esercizio 3. Considera le due rette affini seguenti in $\mathbb{R}^3$:

$$r = \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad s = \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

a) Trova la distanza fra r e s.
b) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = s$.

Esercizio 4. Considera al variare di $k \in \mathbb{R}$ la conica affine

$$C_k = \{x^2 - 6xy + ky^2 + 2x + k = 0\}.$$

a) Determina il tipo affine di C_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
b) Determina per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica è una ellisse o una iperbole, e determina il suo centro al variare di k in questi casi.

Compito di Geometria e algebra lineare del 26 giugno 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Svolgi i punti seguenti:

a) Scrivi la definizione di prodotto hermitiano e di matrice hermitiana.
b) Dimostra che gli autovalori di una matrice hermitiana sono sempre numeri reali.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale formato da tutti i polinomi in x di grado al massimo due. Considera l'endomorfismo $F: V \to V$ dato da

$$F(p) = p' + 4x^2p(0)$$

dove p' indica la derivata di p.

a) L'endomorfismo F è diagonalizzabile?
b) Considera lo stesso endomorfismo F definito sui complessi, cioè con $V = \mathbb{C}_2[x]$. È diagonalizzabile?
c) Nelle domande precedenti, nei casi in cui sia diagonalizzabile, trova una base di autovettori.

Esercizio 3. Siano $r, s \subset \mathbb{R}^3$ due rette affini incidenti e ortogonali. Sia $R_\theta: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di angolo θ intorno ad r e $S_\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di angolo φ intorno ad s.

(1) Sia $\varphi = \theta = \frac{\pi}{2}$. Mostra che la composizione $R_\theta \circ S_\varphi$ è una rotazione intorno ad un asse e calcola l'angolo di rotazione.
(2) Per quali valori degli angoli φ e θ le isometrie R_θ e S_φ commutano? (Ricordiamo che le isometrie commutano se $R_\theta \circ S_\varphi = S_\varphi \circ R_\theta$.)

Esercizio 4. Sia $V = M(2)$ lo spazio vettoriale formato dalle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia inoltre

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica 2×2 fissata, sempre a coefficienti reali. Definiamo una applicazione $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$g(X, Y) = Tr({}^{t}X\, S\, Y) \qquad \text{per ogni } X, Y \in V.$$

a) Dimostra che g è un prodotto scalare.
b) Calcola la segnatura di g se $a = c = 0$ e $b \neq 0$.
c) Dimostra che se la matrice simmetrica S è definita positiva allora anche il prodotto scalare g è definito positivo.

Compito di Geometria e algebra lineare del 17 luglio 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare con $\dim N(T) = 1$ e sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 4

a) dimostrare che $W \cap Im(T) \neq 0$;
b) quali sono le possibili dimensioni di $W \cap Im(T) \neq 0$? motivare la risposta

Esercizio 2. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 9 & -3 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

a) La matrice A è diagonalizzabile?
b) Determina forma di Jordan e polinomio minimo di A.

Esercizio 3. Considera la retta affine in $\mathbb{R}^3$

$$r = \begin{cases} x = 1 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

a) Scrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ che sia una rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ intorno a r.
b) Scrivi una isometria $g(x) = Cx + d$ con $C \neq I$ tale che $g(r) = r$ e che non abbia punti fissi.

Esercizio 4. Sia b il seguente prodotto scalare su $\mathbb{R}^7$

$$b\big((x_1, \ldots, x_7), (y_1, \ldots, y_7)\big) = \sum_{i \neq j} x_i \, y_j$$

Determinare la segnatura di b.

Compito di Geometria e algebra lineare del 7 settembre 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) È vero che se $F^2 =$ allora F è diagonalizzabile?
b) È vero che se $F^2 = -$ allora F è diagonalizzabile?
c) È vero che se $F^2 = 0$ allora F è diagonalizzabile?

motivare la risposta con una dimostrazione nel caso sia diagonalizzabile o con un controesempio in caso contrario.

Esercizio 2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $2x + z = 0$, sia E lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia $T : W \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x + 2z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Sia inoltre $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \quad \text{e} \quad S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) scegliere una base di W e una di E e scrivere la matrice associata a T rispetto a queste basi.
b) scrivere la matrice associata ad S rispetto alla basi standard di $\mathbb{R}^3$ ed E.

Esercizio 3. Considera l'isometria $f(x) = Ax$ di $\mathbb{R}^3$ data da

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilisci se f è una riflessione, una rotazione o una antirotazione e determina l'insieme dei punti x tali che $f(x) = x$;
b) Trova un vettore non nullo $b \in \mathbb{R}^3$ tale che l'isometria $g(x) = Ax + b$ non abbia punti fissi.
c) Trova un vettore non nullo $b \in \mathbb{R}^3$ tale che l'isometria $g(x) = Ax + b$ abbia punti fissi.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2 e sia b il seguente prodotto scalare:

$$b(f, g) = f(0)g(0) - f(1)g(1) + f(2)g(2) \qquad \text{per ogni } f, g \in V.$$

Determinare una base ortogonale e la segnatura di b. Esiste un sottospazio di dimensione 2 ristretta al quale b è degenere?

Esercizio 1. a) La molteplicità geometrica di un autovalore λ è la dimensione di $\ker(F - \lambda Id)$. La molteplicità algebrica di un autovalore λ è il massimo n tale che $(t-\lambda)^n$ divide il polinomio caratteristico di F.

b) Se $\dim V = 4$ e la molteplicità geometrica di 2 è quattro allora $\ker(F - 2Id) = V$ ovvero $F - 2Id = 0$ o equivalentemente $F = 2Id$.

Esercizio 2. a) Sia $\mathcal{E}$ la base standard di V: $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1/2y \\ 2z & w \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} 0 & -y \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi le matrici associate ad F_A e G_A sono

$$[F_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad [G_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $p_F(t) = (t-1)^2(t-2)(t-1/2)$ e $p_G = t^2(t^2-1)$.

b) L'autospazio relativo all'autovalore 1 di F_A è l'insieme delle matrici X tali che $F_A(X) = X$ ovvero $AXA^{-1} = X$. Moltiplicando per A a destra otteniamo che è l'insieme delle matrici X tali che $AX = XA$.

L'autospazio relativo all'autovalore G di G_A è l'insieme delle matrici X tali che $G_A(X) = 0$ ovvero $AX - XA = 0$. Sommando XA otteniamo che è l'insieme delle matrici X tali che $AX = XA$.

Quindi i due autospazi coincidono.

Esercizio 3. a) Il piano π è il piano ortogonale al vettore $v_0 = Q - P$ e passante per il punto medio tra P e Q. Nel nostro caso è il piano $y = 2$.

b) Per trovare l'espressione della riflessione r rispetto al piano π realizziamo tale riflessione nel seguente modo:

- applichiamo la traslazione che porta il punto del piano $(0,2,0)$ nell'origine (va bene un qualsiasi punto del piano), in coordinate:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$$

- applichiamo la riflessione rispetto al piano $\pi_0 : \ y = 0$, in coordinate:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

- applichiamo la traslazione che porta l'origine nel punto $(0,2,0)$ (lo stesso scelto prima), in coordinate:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y+2 \\ z \end{pmatrix}.$$

componendo le applicazioni una dopo l'altra otteniamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y+2 \\ -z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y+4 \\ -z \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Se F_c è una riflessione allora deve avere almeno un punto fisso. Studiamo quindi inanzitutto i punti fissi di F_c ovvero i punti che risolvono l'equazione $F_c(v) = Av + b + c = v$ che riscriviamo nella forma $(I - A)v = b + c$.

Osserviamo che

$$I - A = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi se c è della forma $(0, s, 0)$ allora l'applicazione ha come punti fissi il piano $y = 2 + \frac{s}{2}$ e quindi F_c è la riflessione rispetto a tale piano.

Se c non è di tale forma allora F_c non ha punti fissi e l'applicazione è la composizione di una riflessione e di una traslazione non nulla nella direzione del piano ovvero una glissoriflessione. Verifichiamo questo fatto.

Sia $c = d + e$ con d della forma $(0, s, 0)$ ed e nel piano $y = 0$. Abbiamo che

$$F_c(v) = F_d(v) + e.$$

Per quanto già osservato F_d è una riflessione rispetto ad un piano parallelo ad $y = 0$ ed e è nella direzione dello stesso piano, come volevamo.

Esercizio 4. Riscrivendo i termini $x^2 + 2tx$ e $(1 - t)(y^2 - 2y)$ come differenza di due quadrati possiamo riscrivere la conica nella forma $(x+t)^2 + (1-t)(y-1)^2 - t^2 + t - 1 + 2 - t = 0$ ovvero, semplificando,

$$(x + t)^2 + (1 - t)(y - 1)^2 = t^2 - 1.$$

Cambiando variabili e chiamando $u = x + t$ e $v = y - 1$ possiamo riscriverla nella forma $u^2 + (1 - t)v^2 = t^2 - 1$ che è già in forma diagonale.

a) La conica è vuota se $(1 - t) > 0$ e $t^2 - 1 < 0$, ovvero se $1 > t > -1$.

b) La conica è una ellisse non degenere se $(1 - t) > 0$ e $(t^2 - 1) > 0$ ovvero se $t < -1$.

La conica è una iperbole per $(1 - t) < 0$ e $t^2 - 1 \neq 0$ ovvero per $t > 1$.

Rimangono da studiare i valori $t = \pm 1$. Per $t = 1$ otteniamo $(x + 1)^2 = 0$ ovvero $x = -1$ che è una retta, mentre per $t = -1$ otteniamo $(x - 1)^2 + 2(y - 1)^2 = 0$ ovvero $x = y = 1$ che è un punto.

In particolare la conica non è mai una parabola.

c) Per $t \leqslant -1$ o $t > 1$ la conica ha centro $(-t, 1)$, altrimenti non ha centro.

d) La conica è una circonferenza non degenere se $(1 - t) = 1$ e $t^2 - 1 \geqslant 0$ che non si verifica mai. Per $t = 1$ la conica è un punto ovvero una circonferenza degenere di raggio 0.

Soluzioni del compito del 27 gennaio 2017

Esercizio 1. Fatto a lezione.

Esercizio 2. Un tentativo consiste nel scegliere una base $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 0, 1)$ del piano e scrivere una matrice che contenga questi vettori come colonne, ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poi si verifica che questa A non è diagonalizzabile, quindi in questo caso il tentativo è riuscito. Un metodo più generale consiste nel costruire una composizione della proiezione ortogonale sul piano con una rotazione lungo il piano di un certo angolo.

Esercizio 3. Le matrici associate a p_W e a R sono

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e la loro composizione è

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -4 \\ 5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}.$$

Prendiamo una base v_1, v_2 di W, ad esempio

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le loro immagini tramite $p_W \circ R$ sono

$$p_W(R(v_1)) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}-8 \\ -5\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}+16 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\big((\sqrt{2}+8)v_1 - 5\sqrt{2}v_2\big),$$

$$p_W(R(v_2)) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}(\sqrt{2}v_1 + 5\sqrt{2}v_2).$$

Quindi la matrice associata a $p_W \circ R$ nella base v_1, v_2 è

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+8 & \sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Per valutare la diagonalizzabilità possiamo ignorare il fattore $\frac{1}{10}$. Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 - (6\sqrt{2}+8)\lambda + 20 + 40\sqrt{2}.$$

Si vede che $\Delta < 0$ e quindi non è diagonalizzabile.

È anche possibile dare una dimostrazione geometrica del fatto che non ci sono autovettori per T.

Esercizio 4.

a) L'indice di positività 2 è la massima dimensione di un sottospazio su cui la restrizione sia definita positiva. Quindi la risposta è no.

b) La risposta è sì. Per il teorema di Sylvester, il prodotto scalare ha una base ortogonale v_1, v_2, v_3, v_4 rispetto a cui la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un sottospazio W con le proprietà richieste è dato da

$$W = \mathrm{Span}(v_1, v_3, v_2 + v_4).$$

1. Soluzioni del compito del 15 febbraio 2017

Esercizio 1.

a) Svolto a lezione

b) No, non rimane vera. Se la segnatura è $(1,1,0)$, esiste una base v_1, v_2 rispetto alla quale il prodotto scalare è determinato dalla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una isometria è determinata da una matrice M tale che ${}^{\mathrm{t}}MSM = S$. Scrivo

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e l'equazione diventa

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo il prodotto, questa è equivalente a

$$\begin{pmatrix} a^2-c^2 & ab-cd \\ ab-cd & b^2-d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Non è necessario determinare tutte le soluzioni. Ne cerchiamo ad esempio una con $a = d$ e $b = c$. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ 0 & b^2-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi basta risolvere $a^2 - b^2 = 1$. Ad esempio, con $b = 1$ e $a = \sqrt{2}$ otteniamo l'isometria

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Questa isometria ha autovalori $\sqrt{2} \pm 1$.

Esercizio 2. Diagonalizzando la matrice troviamo

$$A = MDM^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} A^{100} &= MD^{100}M^{-1} = MDM^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3^{100} & 2^{100} \\ 3^{100} & -2^{101} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^{100} - 2^{100} & 3^{100} - 2^{100} \\ -2\cdot 3^{100} + 2^{101} & -3^{100} + 2^{101} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.

a) Con calcoli standard si ottiene

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Con calcoli standard si ottiene

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Esiste. Basta prendere una retta ℓ perpendicolare a U e si verifica che F è una traslazione, perché è del tipo $F(x) = x + b$.

Esercizio 4.

a) La matrice associata a q_1 nella base canonica $1, x, x^2$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2+1 & a^3+2b \\ a^2 & a^3+2b & a^4+4b^2+4 \end{pmatrix}$$

I determinanti dei minori principali sono 1, 1, 4 e quindi la segnatura è sempre $(3, 0, 0)$. Esiste anche un metodo alternativo per arrivare a questa conclusione, simile a quello descritto nel punto successivo.

b) Un polinomio $f \neq 0$ di grado $\leqslant 2$ ha al masimo due radici distinte. Se a, b, c sono distinti, allora f non può annullarsi in tutte e tre e quindi

$$q_2(f, f) = f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 > 0.$$

Segue che q_2 è definito positivo. Se invece a, b, c non sono distinti, ad esempio vale $a = b$, allora prendiamo $f(x) = (x - a)(x - c)$ e verifichiamo che

$$q_2(f) = f(a)^2 + f(a)^2 + f(c)^2 = 0$$

e quindi f è isotropo. Il prodotto scalare non è definito positivo.

Soluzioni del compitino del 21 febbraio 2017, prima parte versione A

Domanda 1. $z = 1 + i$ e $z = -1 - i$.

Domanda 2. $p_A(t) = -(t-2)(t-1)(t+1) = -t^3 + 2t^2 + t - 2$.

Domanda 3. $\varphi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x + y + z.$

Domanda 4. $rango(F) = 2$.

Domanda 5. $\dim U = 3$.

Soluzioni del compitino del 21 febbraio 2017, prima parte versione B

Domanda 1. $z = 1 - i$ e $z = -1 + i$.

Domanda 2. $p_A(t) = -(t+2)(t-1)(t+1) = -t^3 - 2t^2 + t + 2$.

Domanda 3. $\varphi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y - z.$

Domanda 4. $rango(F) = 3$.

Domanda 5. $\dim U = 5$.

Soluzioni del compitino del 21 febbraio 2017, seconda parte

Esercizio 1. a) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K e sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare allora

$$\dim V = \dim \ker F + \dim\ Im\, F.$$

b) Una tale coppia di applicazioni non esiste. Infatti per il teorema della dimensione l'applicazione f ha nucleo di dimensione almeno 1 quindi esiste v non zero tale che $f(v) = 0$. Quindi anche $g(f(v)) = 0$ e $g \circ f$ non è iniettiva.

Esercizio 2. a)Una base di W è

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ed una base di V è data da

$$p_1(t) = t - 1, \qquad p_2(t) = t^2 - 1 \qquad p_3(t) = t^3 - 1$$

Abbiamo $F(w_1) = 1 - 2t + t^3 = p_3(t) - 2p_1(t)$ e $F(w_2) = 2t - t^2 - t^3 = -p_3(t) - p_2(t) + 2p_1(t)$. Quindi

$$[F]^{w_1,w_2}_{p_1,p_2,p_3} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Osserviamo che e_1, w_1, w_2 è una base di $\mathbb{R}^3$ e che per definizione di G abbiamo

$$[G]^{e_1,w_1,w_2}_{1,t,t^2,t^3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per determinare la matrice cercata calcoliamo la matrice di cambiamento di base $[Id]^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,w_1,w_2}$. Tale matrice è l'inversa della matrice

$$[Id]^{e_1,w_1,w_2}_{e_1,e_2,e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo calcolare l'inversa della matrice in vari modi, procediamo per riduzione a scalini della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sommiamo la terza riga alla seconda, poi sommiamo la seconda alla prima e infine cambiamo segno alla seconda e alla terza riga. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e ricaviamo che $[Id]^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,w_1,w_2}$ è la matrice costituita dalle ultime tre colonne della matrice appena calcolata. Quindi

$$[G]^{e_1,e_2,e_2}_{1,t,t^2,t^3} = [G]^{e_1,w_1,w_2}_{1,t,t^2,t^3} \cdot [Id]^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,w_1,w_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Sia $\rho \geqslant 0$ il modulo di z e $\theta \in [0, 2\pi)$ l'argomento. Abbiamo $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ e quindi $32 = z^4\bar{z} = \rho^5 e^{3i\theta}$. Da questa equazione ricaviamo $\rho^5 = 32$ da cui $\rho = 2$ e $3\theta = 0$ come angolo ovvero $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$. Quindi le soluzioni sono

$$z = 2e^0 = 2 \qquad z = 2e^{2\pi/3} = -1 + i\sqrt{3} \qquad z = 2e^{4\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}$$

Esercizio 4. Tutte le colonne della matrice A sono uguali quindi L_A ha rango 1 e di conseguenza il nucleo ha dimensione 12. Il nucleo di L_A è definito dall'equazione $x_1 + \cdots + x_{13} = 0$ ovvero $x_1 = -x_2 - x_2 \cdots - x_{13}$. Una base del nucleo è quindi data da $v_i = e_1 - e_i$ per $i = 2, \ldots, 13$.

Notiamo che se v_1 è il vettore con tutte le entrate uguali a 1, abbiamo $L_A(v_1) = 13\, v_1$. Quindi $v_1, \cdots, v_{13}$ sono una base di autovettori e abbiamo

$$[L_A]^{v_1 \ldots v_{13}}_{v_1 \ldots v_{13}} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di L_A è quindi uguale a $t^{12}(13 - t) = 13\, t^{12} - t^{13}$.

2. Soluzioni del compitino del 31 maggio 2017

Esercizio 1.

(1) Fatto a lezione.
(2) Ad esempio $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare $g(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ e $U = \text{Span}(e_1 + e_2)$.

Esercizio 2. Il polinomio caratteristico è $(\lambda - 2)^4$. Otteniamo

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

I due generatori di V_2 sono autovalori indipendenti. La matrice non è diagonalizzabile perché la molteplicità geometrica di 2 è 2 e non 4. Ne ricaviamo in particolare che la matrice di Jordan J di A ha due blocchi di Jordan con autovalore 2. Verifichiamo che $(A - 2I)^2 \neq 0$, quindi c'è un blocco di ordine almeno tre. L'unica possibilità quindi è che

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio minimo quindi è $m(x) = (\lambda - 2)^3$.

Esercizio 3. La matrice associata nella base canonica è

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con il criterio di Jacobi troviamo che la segnatura è $(2, 1, 0)$. La restrizione sul sottospazio $U = \text{Span}(x, x^2)$ ha segnatura $(1, 1, 0)$.

Non può esistere un sottospazio U di dimensione 2 su cui la restrizione abbia segnatura $(0, 0, 2)$: se esistesse, prendendo una base v_1, v_2 di U e completando ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V otterrei che la matrice associata $S' = [g]_{\mathcal{B}}$ in questa base ha una sottomatrice quadrata 2×2 tutta nulla, e questo implicherebbe facilmente che $\det S' = 0$, ma deve essere $\det S' < 0$. Assurdo.

Esercizio 4. Si può prendere una rototraslazione di angolo π lungo una qualsiasi retta $r \subset \pi$. Ad esempio possiamo scegliere $r = \{x = y = 0\}$. In questo caso scriviamo $f(x) = Ax + b$ con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

Qui c è un qualsiasi numero diverso da zero, ad esempio $c = 1$ va bene. Brevemente:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z + c \end{pmatrix}.$$

3. Soluzioni del compito del 5 giugno 2017

Esercizio 1. a) Una applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$, si dice ortogonale se $b(T(u), T(v)) = b(u, v)$ per ogni $u, v \in V$

b) Sia b definito positivo e sia λ un autovalore di una trasfromazione T ortogonale rispetto a b. Allora esiste un vettore non nullo v tale che $T(v) = \lambda\, v$. Quindi

$$b(v, v) = b(T(v), T(v)) = \lambda^2\, b(v, v)$$

e dividendo per $b(v, v)$ che è non nullo, perché b è definito positivo, otteniamo $\lambda^2 = 1$, da cui la tesi.

c) Sia b il prodotto scalare non degenere su $\mathbb{R}^2$ associato alla forma quadratica $q(x, y) = xy$. La trasformazione $T(x, y) = (2x, y/2)$ è ortogonale ma ha autovalori uguali a 2 e $1/2$.

Esercizio 2. a) Il polinomio caratteristico di F è $(t-1)t^2$. Per determinare la forma di Jordan bisogna calcolare l'autospazio relativo all'autovalore zero. Tale autospazio risulta uguale ai vettori della forma $(0, y, y)$ e ha quindi dimensione 1. La forma di Jordan è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Se si possono scegliere liberamente una base in partenza e una in arrivo è sempre possibile diagonalizzare una matrice, è praticamente la dimostrazione della formula della dimensione.

Nel caso specifico possiamo scegliere $u_1 = (0, 1, 1)$ che è una base del nucleo di F e u_2 e u_3 qualsiasi tali che u_1, u_2, u_3 sia una base di $\mathbb{R}^3$. Per esempio $u_2 = e_1$ e $u_3 = e_2$. Osserviamo che $v_2 = F(u_2) = (1, 0, 1)$ e $v_3 = F(u_3) = (0, 1, 1)$ sono linearmente indipendenti. Sia ora v_1 un completamento ad una base di questi due vettori, per esempio $v_1 = e_1$ allora

$$[F]^{u_1,u_2,u_3}_{v_1,v_2,v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) una tale base non esiste infatti supponiamo esista allora avremmo

$$[F]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,v_3} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Inoltre poiché $F(e_i) \neq 0$ per ogni i abbiamo $a, b, c \neq 0$. Il rango della matrice associata sarebbe quindi uguale a 3 mentre abbiamo visto che F ha nucleo non banale.

Esercizio 3. a) Osserviamo che possiamo scrivere r nella forma $P_0+\mathbb{R}\,u_0$ con $u_0 = e_3$ e $P_0 = e_1$ e s nella forma $\mathbb{R}\,v_0$ con $v_0 = e_1 + e_2 + e_3$.

Consideriamo il piano π generato da u_0 e v_0. Tale piano avrà equazione $ax + by + cz = 0$ e imponendo che contenga u_0 e v_0 otteniamo $c = 0$ e $a = -b$. In particolare è il piano di equazione $x - y = 0$ ovvero è il piano ortogonale al vettore $w_0 = e_1 + e_2$. Indichiamo con T la proiezione di $\mathbb{R}^3$ su questo piano. Ricordiamo che abbiamo

$$T(v) = v - \frac{(v \cdot w_0)}{\|w_0\|^2} w_0.$$

Tutti i punti della retta r hanno la medesima distanza dal piano π e la proiezione di r su π è una retta parallela ad u_0 e quindi interseca s. Quindi la distanza di r da s è uguale alla distanza di r da π che è uguale alla distanza di P_0 da $T(P_0)$. Abbiamo quindi

$$dist(r, s) = dist(P_0, \pi) = \|P_0 - T(P_0)\| = \|\frac{(P_0 \cdot w_0)}{\|w_0\|^2} w_0\| = \frac{|(P_0 \cdot w_0)|}{\|w_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Procediamo nel seguente modo, prima trasliamo la retta r in una retta r' passante per l'origine e poi operiamo una qualsiasi trasformazione ortogonale che porta r' in s. Come traslazione possiamo scegliere la traslazione $v \mapsto v - e_1$ ovvero che porta le retta r nella retta $\mathbb{R}\,u_0$.

Ora consideriamo una qualsiasi trasformazione ortogonale che manda la retta r' nella retta s. La retta r' è generata da u_0 mentre la retta s è generata da $v_1 = v_0/\sqrt{3}$ quindi una trasformazione ortogonale che manda u_0 in v_1 manda la retta r' nella retta s. Per determinare una tale trasfromazione ortogonale completiamo v_1 ad una base ortonormale, per esempio $v_2 = 1/\sqrt{2}(e_1 - e_2)$ e $v_3 = 1/\sqrt{6}(e_1 + e_2 - 2e_3)$. Quindi la matrice le cui colonne sono le coordinate di v_2, v_3, v_1, ovvero la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

è ortogonale e verifica $Au_0 = v_1$. Se compongo le due applicazioni ottengo

$$f(v) = A(v - e_1) = Av - Ae_1$$

che è una isometria che porta r in s.

Esercizio 4. a) per determinare la classificazione affine della quadrica determiniamo la segnatura della matrice $\bar{A}$ associata alla quadrica completa e la segnatura della matrice A associata alla parte quadratica della conica. Abbbiamo

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & k \end{pmatrix}.$$

I determinanti dei minori in alto a sinistra della matrice $\bar{A}$ sono

$$1, k - 9, k(k - 10)$$

quindi della matrice A sono $1, k - 9$.

Per $k \neq 0, 10$ possiamo calcolare le due segnature con il criterio di Sylvester e otteniamo

- per $k < 0$ $\bar{A}$ ha segnatura $(1, 2, 0)$ e A ha segnatura $(1, 1, 0)$ come $x^2 - y^2 - 1 = 0$ e quindi è una iperbole.
- per $k = 0$ otteniamo $x(x - 6y + 2) = 0$ che sono due rette incidenti;
- per $0 < k < 9$ $\bar{A}$ ha segnatura $(2, 1, 0)$ e A ha segnatura $(1, 1, 0)$ come $x^2 - y^2 + 1 = 0$ e quindi è una iperbole.
- per $9 < k < 10$ $\bar{A}$ ha segnatura $(2, 1, 0)$ e A ha segnatura $(2, 0, 0)$ come $x^2 + y^2 - 1 = 0$ e quindi è una ellisse.
- per $10 < k$ $\bar{A}$ ha segnatura $(3, 0, 0)$ e A ha segnatura $(2, 0, 0)$ come $x^2 + y^2 + 1 = 0$ e quindi la quadrica è vuota.

- per $k=10$ la segnatura di $\bar{A}$ è $(2,0,1)$ e quella di A è $(2,0,0)$ come $x^2+y^2=0$ e quindi è un punto.

Infine per $k=9$ $\bar{A}$ è non degenere ha determinante negativo e ha il primo minore uguale a 1. Quindi l'unica possibilità è che la segnatura di $\bar{A}$ sia $(2,1,0)$ e quella di A $(1,0,1)$ come $x^2-2y=0$ e quindi è una parabola;

b) Il centro è soluzione del sistema $Ax+b=0$, cioè

$$\begin{cases} x-3y+1=0 \\ -3x+ky=0 \end{cases}$$

e quindi il centro è il punto

$$\left(\frac{k}{9-k}, \frac{3}{9-k}\right).$$

4. Soluzioni del compito del 26 giugno 2017

Esercizio 1. Svolto a lezione. Una matrice hermitiana rappresenta un endomorfismo autoaggiunto rispetto al prodotto hermitiano euclideo di $\mathbb{C}^n$, quindi il punto b) si riduce a mostrare che gli autovalori di un endomorfismo autoaggiunto sono reali.

Esercizio 2. La matrice associata nella base canonica è

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$p(x)=x^3-8.$$

Ha solo una radice reale 2, quindi non è diagonalizzabile. Sui complessi, ha tre radici complesse distinte, quindi è diagonalizzabile. Le radici sono

$$\lambda_1=2, \qquad \lambda_{2,3}=2\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

quindi

$$\lambda_1=2, \qquad \lambda_2=-1+\sqrt{3}i, \qquad \lambda_3=-1-\sqrt{3}i.$$

Una base di autovettori corrispondenti è data da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{3}i \\ -1-\sqrt{3}i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{3}i \\ -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix}.$$

Quindi tornando ai polinomi troviamo gli autovettori

$$1+2x+2x^2, \qquad (1-\sqrt{3}i)-4x+2(1+\sqrt{3}i)x^2, \qquad (1-\sqrt{3}i)+2(1+\sqrt{3}i)x-4x^2.$$

Esercizio 3. Scegliamo un sistema di riferimento ortonormale in cui l'origine è l'intersezione fra r e s e le rette ortogonali r ed s sono gli assi x e y. In questo sistema di riferimento le rotazioni si scrivono come

$$R_\theta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad S_\varphi=\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

In particolare abbiamo

$$R_{\frac{\pi}{2}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{\frac{\pi}{2}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_{\frac{\pi}{2}}\circ S_{\frac{\pi}{2}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La composizione di due rotazioni è sempre una rotazione. L'angolo di rotazione di $R_\theta\circ S_\varphi$ in questo caso è un angolo α tale che $1+2\cos\alpha=0$ e quindi $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, cioè $\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}$.

Per quanto riguarda la commutatività, veirifichiamo che

$$R_\theta S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta & \sin\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad S_\varphi R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}$$

Se $\theta = 0$ oppure $\varphi = 0$, una delle due matrici è l'identità e quindi chiaramente commutano. Se θ e φ sono entrambi diversi da zero, allora $R_\theta S_\varphi = S_\varphi R_\theta$ se e solo se $\sin\varphi = \sin\theta = 0$. Quindi le matrici commutano anche nel caso $\theta = \varphi = \pi$.

Esercizio 4.

a) Per la bilinearità:

$$\begin{aligned} g(X+X',Y) &= Tr({}^{\mathrm{t}}(X+X')SY) = Tr({}^{\mathrm{t}}XSY + {}^{\mathrm{t}}X'SY) = Tr({}^{\mathrm{t}}XSY) + Tr({}^{\mathrm{t}}X'SY) \\ &= g(X,Y) + g(X',Y) \\ g(\lambda X, Y) &= Tr({}^{\mathrm{t}}(\lambda X)SY) = Tr(\lambda\,{}^{\mathrm{t}}XSY) = \lambda Tr({}^{\mathrm{t}}XSY) = \lambda g(X,Y). \end{aligned}$$

Per la simmetria, usiamo le relazioni $Tr(A) = Tr({}^{\mathrm{t}}A)$ e ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$ e troviamo

$$g(X,Y) = Tr({}^{\mathrm{t}}XSY) = Tr({}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}XSY)) = Tr({}^{\mathrm{t}}Y\,{}^{\mathrm{t}}S\,{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}X)) = Tr({}^{\mathrm{t}}YSX) = g(Y,X).$$

b,c) La matrice associata a g nella base $\mathcal{B} = \{e_{11}, e_{21}, e_{12}, e_{22}\}$ è

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

A questo punto è chiaro che gli autovalori di questa matrice sono gli stessi di quelli di S, con molteplicità doppie. Quindi se $a = c = 0$ e $b \neq 0$ otteniamo che la segnatura è $(2,2,0)$. Se invece S è definita positiva, ha tutti autovalori positivi, e allora anche la matrice $[g]_{\mathcal{B}}$ ha tutti autovalori positivi, quindi è definita positiva.

5. Soluzioni del compito del 17 luglio 2017

Esercizio 1. a) Sia $V = Im(T)$. Dal teorema della dimensione ricaviamo che $\dim V = 3$. Dalla formula di grassmann otteniamo inoltre che

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 7 - \dim V + W.$$

Poiché $V + W \subset \mathbb{R}^5$ abbiamo che la sua somma ha dimensione minore o uguale a 5 e quindi $\dim V \cap W \geqslant 2$ ed in particolare è non zero.

b) Nel punto a) abbiamo ricavato che $\dim V \cap W \geqslant 2$, inoltre poiché $V \cap W \subset V$ abbiamo che $\dim V \cap W \leqslant 3$. Quindi la dimensione di $V \cap W$ è uguale a 2 o a 3. Mostriamo con un esempio che entrambe le possibilità si verificano.

Supponiamo che sia $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = T(x_1, x_2, x_3, 0, 0)$ e che sia W il sottospazio dei vettori con la prima coordinata uguale a 0. Allora $V \cap W$ è il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ e ha dimensione 2.

Supponiamo ora invece che W sia il sottospazio dei vettori con l'ultima coordinata uguale a 0 e che T sia come in precedenza. Allora $V \cap W$ è il sottospazio definito dalle equazioni $x_4 = x_5 = 0$ e ha dimensione 3.

Esercizio 2. a) A non è diagonalizzabile, infatti se calcoliamo il polinomio caratteristico otteniamo

$$p_A(t) = [(t-3)(t+3)+9]^2 = t^4$$

quindi A ha un unico autovalore uguale a 0 con molteplicità uguale a 4. Se fosse diagonalizzabile sarebbe quindi la matrice nulla.

b) Calcoliamo l'autospazio relativo all'autovalore 0. Otteniamo che è l'insieme dei vettori della forma $(x, 3x, z, 3z)$, quindi ha dimensione 2. Questo ci dice che la forma di Jordan è composta da due blocchi di Jordan che possono avere dimensione 3 ed 1 o 2 e 2. Calcoliamo adesso il polinomio minimo, questo sarà un divisore di t^4. Calcolando A^2 otteniamo che $A^2 = 0$ quindi il polinomio minimo è t^2. La forma di Jordan non può quindi avere blocchi di dimensione 3. Abbiamo quindi che la forma di Jordan di A è la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. a) La retta r può essere scritta nella forma $r = \{v_0 + t\, v_1 \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ con $v_0 = (1,0,1)$ e $v_1 = (0,1,1)$.

Calcoliamo prima la matrice associata ad una rotazione R di $\pi/2$ attorno alla retta $\mathbb{R}v_1$. Costruiamo una base ortonormale che ha come primo vettore un vettore parallelo a v_1. Possiamo scegliere

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare abbiamo

$$[Id]_{e_1,e_2,e_3}^{u_1,u_2,u_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad [Id]_{u_1,u_2,u_3}^{e_1,e_2,e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nella base u_1, u_2, u_3 possiamo scegliere R in modo che sia

$$[R]_{u_1,u_2,u_3}^{u_1,u_2,u_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned}
[R]_{e_1,e_2,e_3}^{e_1,e_2,e_3} &= [Id]_{e_1,e_2,e_3}^{u_1,u_2,u_3} \cdot [R]_{u_1,u_2,u_3}^{u_1,u_2,u_3} \cdot [Id]_{u_1,u_2,u_3}^{e_1,e_2,e_3} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Possiamo calcolare f nel seguente modo: prima applichiamo una traslazione che porta la retta r nella retta $\mathbb{R}v_1$, poi applichiamo R e poi applichiamo la traslazione opposta a quella iniziale. Ovvero $f(x) = R(x - v_0) + v_0 = R(x) + v_0 - R(v_0)$ dalla quale otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

b) Possiamo costruire g componendo l'applicazione f costruita nel punto precedente con una traslazione lungo l'asse r. In questo modo otteniamo una glissorotazione di asse r che non ha punti fissi. Per esempio possiamo porre $g(x) = f(x) + v_1$ da cui

$$C = A \qquad \text{e} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Osserviamo che
$$b\big((x_1,\dots,x_7),(x_1,\dots,x_7)\big) = (\sum x_i)^2 - \sum x_i^2.$$
Sia W il sottospazio definito dall'equazione $x_1+\dots+x_7=0$. W ha dimensione 6 e
$$b\big((x_1,\dots,x_7),(x_1,\dots,x_7)\big) = -\sum x_i^2 \quad \text{se} \quad (x_1,\dots,x_7)\in W$$
quindi b è definita negativa su W. In particolare $i_- \geqslant 6$.

Sia ora U il sottospazio generato dal vettore $u_0=(1,\dots,1)$. Abbiamo $b(u_0,u_0)=42>0$. Quindi $i_+\geqslant 1$.

Poiché la somma degli indici di segnatura deve essere uguale a 7 otteniamo $i_+=1$, $i_-=6$ e $i_0=0$.

Si poteva anche calcolare il polinomio caratteristico della matrice associata o trovare una base ortonormale.

Soluzioni del compito del 7 settembre 2017

Esercizio 1. a) In questo caso F è diagonalizzabile. Infatti $F^2 - = 0$ quindi il polinomio minimo di F divide $t^2-1=(t-1)(t+1)$ e quindi non ha radici multiple.

b) In questo caso F non è mai diagonalizzabile. Infatti se $F^2 + = 0$ allora ogni autovalore verifica $\lambda^2+1=0$. In particolare una tale applicazione non ha autovalori reali e quindi non è diagonalizzabile. Si noti inoltre che applicazioni di questo tipo esistono: per esempio se $V=\mathbb{R}^2$ e F è l'applicazione lineare associata alla matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
allora $F^2=-Id$.

c) In questo caso F può essere non diagonalizzabile. Per esempio se $V=\mathbb{R}^2$ e F è applicazione lineare associata
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
F ha come unico autovalore 0 con molteplicità geometrica 1.

Esercizio 2. a) W è un piano e ha per base i vettori $v_1=e_2$ e $v_2=e_1-2e_3$. Abbiamo
$$T(v_1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}+E_{21} \qquad T(v_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = E_{11}-3E_{22}$$
Quindi se scegliamo come base di E la base standard: $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ abbiamo che
$$[T]^{v_1,v_2}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Osserviamo che $v_3=e_1+e_2+e_3\notin W$ quindi v_1,v_2,v_3 è una base di $\mathbb{R}^3$. In particolare abbiamo che
$$[S]^{v_1,v_2,v_3}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Effettuiamo adesso il cambio di base. Abbiamo
$$[Id]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

e calcolandone l'inversa otteniamo

$$[Id]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,v_3} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

da cui

$$[S]^{e_1,e_2,e_3}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. a) Studiamo l'equazione $A \cdot x = x$ o equivalentemente $(A - I) \cdot x = 0$. Sostituendo il valore di A otteniamo

$$A - I = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

da cui si ricava che l'insieme cercato è il piano π definito dall'equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

Quindi f è la riflessione definita da questo piano.

b,c) L'applicazione g ha punti fissi se e solo l'equazione $g(x) = x$ ha soluzione ovvero se e solo l'equazione

$$(A - I) \cdot x = -b$$

ha soluzione, equivalentemente se b è nell'immagine di $A - I$. La matrice $A - I$ ha rango 1 e l'immagine è la retta generata dal vettore $(1, 1, -1)$. In particolare se $b = (1, 1, -1)$ allora g ha punti fissi e se $b = (1, 0, 0)$ allora g non ha punti fissi.

Esercizio 4. Per calcolare la segnatura e una base ortogonale si può calcolare la matrice associata a b rispetto alla base standard di V e applicare il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Qui procederemo in modo diverso usando il fatto che siamo sullo spazio dei polinomi per svolgerei conti in modo diverso. Osserviamo che la formula che definisce il prodotto scalare diventa più semplice se il polinomio f si annulla in 0 e in 1 o in 0 e 2 o in 1 e in 2. Consideriamo quindi i polinomi di V che si annullano in 0 e 1. Questo è un sottospazio di dimensione 1 di V generato dal polinomio $f_2(x) = x(x - 1)$. Similmente il sottospazio dei polinomi che si annulla in 0 e 2 è generato da $f_1(x) = x(x - 2)$ e il sottospazio dei polinomi che si annullano in $1, 2$ è generato da $f_0(x) = (x - 1)(x - 2)$. Osserviamo che f_0, f_1, f_2 sono linearmente indipendenti, infatti se fosse $f = rf_0 + sf_1 + tf_3 = 0$ da $f(0) = 0$ ricaverremmo $r = 0$ e similmente ricaveremmo $s = t = 0$. Osserviamo inoltre che

$$b(f_0, f_0) = 4 > 0 \qquad b(f_1, f_1) = -1 < 0 \qquad b(f_2, f_2) = 4 > 0 \quad \text{e } b(f_i, f_j) = 0 \quad \text{per } i \neq j$$

Quindi f_0, f_1, f_2 sono una base ortonormale e la segnatura è $(2, 1, 0)$.

Se un prodotto scalare non è definito allora esiste sempre un sottospazio sul quale la forma è degenere. Infatti in queste ipotesi esiste sempre un vettore isotropo non nullo, nel nostro caso per esempio $f = f_0 + 2f_1$. Ora sia W l'ortogonale di f. Poichè b è non degenere W ha dimensione 2 e $b(f, h) = 0$ per ogni $h \in W$ quindi $b|_W$ è degenere.