COMPITI E COMPITINI 2016

A Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2016: prima parte

Istruzioni: Avete 30 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo il risultato o la lettera della risposta corretta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = 1 + i$ e $w = 2 + i$. Calcolare z/w.

Risposta: $z/w =$

Domanda 2. Calcolare il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risposta: $\det A =$

Domanda 3. Sia $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ una applicazione lineare di rango 3. Determinare la dimensione del nucleo di L.

Risposta: $\dim \ker L =$

Domanda 4. Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$. Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A) $\dim(U + W) = 8$ qualsiasi siano U e W.
B) $\dim(U \cap W) = 2$ qualsiasi siano U e W.
C) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 8$.
D) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.
E) Se $\dim U + W = 8$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.

Risposta: L'affermazione sicuramente vera è la

Domanda 5. Si determini la dimensione dello spazio vettoriale $\mathsf{Mat}_{5\times 3}(\mathbb{R})$

Risposta: La dimensione di $\mathsf{Mat}_{5\times 3}(\mathbb{R})$ è uguale a

B Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2016: prima parte

Istruzioni: Avete 30 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo il risultato o la lettera della risposta corretta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = 1 + i$ e $w = 2 + i$. Calcolare w/z.

Risposta: $z/w =$

Domanda 2. Calcolare il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Risposta: $\det A =$

Domanda 3. Sia $L : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare di rango 3. Determinare la dimensione del nucleo di L.

Risposta: $\dim \ker L =$

Domanda 4. Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^7$. Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 4$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A) $\dim(U + W) = 7$ qualsiasi siano U e W.
B) Se $\dim U + W = 7$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.
C) $\dim(U \cap W) = 1$ qualsiasi siano U e W.
D) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 7$.
E) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.

Risposta: L'affermazione sicuramente vera è la

Domanda 5. Si determini la dimensione dello spazio vettoriale $\mathsf{Mat}_{3\times 7}(\mathbb{R})$

Risposta: La dimensione di $\mathsf{Mat}_{3\times 7}(\mathbb{R})$ è uguale a

Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2016: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Si definisca cosa è $\ker T$, il nucleo di T.
b) Si dimostri che se $\ker T = \{0\}$ allora T è iniettiva.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $L_k : V \longrightarrow V$ definita da

$$L_k\big(p(t)\big) = p(t+1) - k\, p(t)$$

per ogni polinomio $p(t)$.

a) Si scelga una base di V e si determini la matrice associata ad L_k rispetto a tale base;
b) Si determini il rango di L_k al variare del parametro k;
c) Sia $f(t)$ il polinomio $f(t) = t^2 + 1$ si determini al variare di k se esistono polinomi $p(t)$ tali che $L_k\big(p(t)\big) = f(t)$.
d) Sia $k = 1$ e si consideri $g(t) = t + 1$. Sia A il sottospazio affine di V dei polinomi $p(t)$ tali che $L_1\big(p(t)\big) = g(t)$. Si determini la dimensione di A e se ne dia una parametrizzazione.

Esercizio 3. Sia B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $E = \mathsf{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriali delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $T : E \longrightarrow E$ l'applicazione definita da $T(X) = B \cdot X$

a) Si determinino nucleo e immagine di T.
b) Si determini una base di E e si calcoli la matrice associata a T rispetto a questa base.
c) Si calcoli il determinante di T.

Esercizio 4. Sia C la matrice

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini un vettore non nullo $v_1 \in \mathbb{R}^2$ tale che $C \cdot v_1 = 3v_1$.
b) Si determini un vettore non nullo $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tale che $C \cdot v_2 = -9\, v_2$.
c) Si calcoli C^{100}.

Soluzioni prima parte versione A

Domanda 1. $z/w = (3 + i)/5$.

Domanda 2. $det(A) = 2$.

Domanda 3. $\dim \ker(L) = 2$.

Domanda 4. La risposta corretta è la D.

Domanda 5. $\dim \mathsf{Mat}_{3\times 5}(\mathbb{R}) = 15$

Soluzioni prima parte versione B

Domanda 1. $w/z = (3 - i)/2$

Domanda 2. $det(A) = -6$.

Domanda 3. $\dim \ker(L) = 4$.

Domanda 4. La risposta corretta è la E.

Domanda 5. $\dim \mathsf{Mat}_{7\times 3}(\mathbb{R}) = 21$

Soluzioni seconda parte

Gli esercizi proposti si prestano a soluzioni anche abbastanza diverse. Qui riportiamo una possibile soluzione.

Esercizio 1. a) Sia V uno spazio vettoriale e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare allora

$$\ker T = \{v \in V \ : \ T(v) = 0\}.$$

b) Vogliamo dimostrare che se $u, v \in V$ e $T(u) = T(v)$, allora $u = v$. Da $T(u) = T(v)$ e dal fatto che T è lineare otteniamo $T(u - v) = 0$. Poiché $\ker T = \{0\}$ ricaviamo che $u - v = 0$ ovvero $u = v$.

Esercizio 2. a) I polinomi $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$ e $f_2(t) = t^2$ sono una base di V. La matrice associata a L_k rispetto a questa base è

$$\begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 2 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

b) Per $k \neq 1$ la matrice è già ridotta a scalini con le entrate lungo la diagonale diverse da zero, e ha quindi rango 3, ed in particolare è surgettiva.

Per $k = 1$ la matrice è pure già ridotta a scalini ma ha rango 2.

c) Per $k \neq 1$ abbiamo visto nel punto b) che l'applicazione L_k è surgettiva e qundi sicuramente esistono polinomi tali che $L_k(p(t)) = f(t)$.

Per $k = 1$ utilizzando la matrice calcolata nel punto a) osserviamo che $L_1(a + bt + ct^2) = b + c + 2ct$ e quindi non potrà mai essere uguale a $f(t)$.

d) Come osservato nel punto precedente $L_1(a+bt+ct^2) = b+c+2ct$. Quindi l'equazione $L_1(a+bt+ct^2) = g(t)$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ 2c = 1 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} b = 1/2 \\ c = 1/2 \end{cases}$$

Una parametrizzazione è quindi data da $F(s) = s + t/2 + t^2/2$ e il sottospazio ha dimensione 1.

Esercizio 3. a) Osserviamo che B è una matrice invertibile, infatti $\det B = -2$. Dimostriamo che $\ker T = \{0\}$. Infatti se $X \in \ker T$ allora $BX = 0$ da cui moltiplicando per B^{-1} ottengo $X = 0$. Dimostriamo che $\operatorname{Im} T = E$. Infatti se $Y \in E$ abbiamo che $T(B^{-1}Y) = BB^{-1}Y = Y$ e quindi Y è nell'immagine di T.

b) Una base dello spazio vettoriale E è data dalle matrici $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. La matrice associata a T rispetto a questa base è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Sottraendo tre volte la prima riga alla terza e tre volte la seconda alla quarta nella matrice C, otteniamo $\det T = \det C = 4$.

Esercizio 4. a) Siano x e y le coordinate di v_1. Dall'equazione $Cv_1 = 3v_1$ ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} -5x + 4y = 3x \\ 8x - y = 3y \end{cases}$$

entrambe le equazioni del sistema sono equivalenti a $y = 2x$. Quindi una soluzione è $x = 1$, $y = 2$ ovvero

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Siano x e y le coordinate di v_2. Dall'equazione $Cv_1 = -9v_1$ ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} -5x + 4y = -9x \\ 8x - y = -9y \end{cases}$$

entrambe le equazioni del sistema sono equivalenti a $y = -x$. Quindi una soluzione è $x = 1$, $y = -1$ ovvero

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Sia $L_C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione associata alla matrice C. Si noti che v_1, v_2 sono una base di $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo la matrice associata a L_C rispetto a questa base, abbiamo

$$D = [L_C]_{v_1,v_2}^{v_1,v_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

da cui

$$D^{100} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & (-9)^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 9^{100} \end{pmatrix}.$$

Per calcolare C^{100} sfruttiamo il fatto che C e D sono la matrice associata a L_C rispetto a due basi diverse. La relazione tra C e D è data dal seguente cambio di base:

$$C = [L_C]^{e_1,e_2}_{e_1,e_2} = [Id]^{v_1,v_2}_{e_1.e_2}[L_C]^{v_1,v_2}_{v_1,v_2}[Id]^{e_1,e_2}_{v_1,v_2} = ADB$$

con $A = [Id]^{v_1,v_2}_{e_1.e_2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $B = [Id]^{e_1,e_2}_{v_1,v_2} = A^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Quindi

$$\begin{aligned}
C^{100} &= (ADA^{-1})^{100} = ADA^{-1}ADA^{-1}\cdots ADA^{-1} = AD^{100}A^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 9^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^{100} & 9^{100} \\ 2\cdot 3^{100} & -9^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^{99}+6\cdot 9^{99} & 3^{99}-3\cdot 9^{99} \\ 2\cdot 3^{99}-6\cdot 9^{99} & 2\cdot 3^{99}+3\cdot 9^{99} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Compitino di algebra lineare del 1 giugno 2016

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Dimostra che se v_1, v_2 sono autovettori di T con autovalori distinti, allora sono indipendenti.
b) Se T è diagonalizzabile, allora T^2 è diagonalizzabile? Motiva la risposta.

Esercizio 2. Determinare per quali valori $t \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} t-1 & 2t & t \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2 & t+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia $M(2)$ lo spazio delle matrici 2×2 e $S \subset M(2)$ il sottospazio delle matrici simmetriche. Considera il prodotto scalare g su $M(2)$ definito nel modo seguente:

$$g(A,B) = \mathrm{tr}(AB).$$

(1) Determina la segnatura di g.
(2) Determina la segnatura della restrizione $g|_S$ di g al sottospazio S.
(3) Considera l'endomorfismo $T\colon M(2) \to M(2)$ definito da

$$T(A) = {}^{\mathrm{t}}A.$$

L'endomorfismo T è una isometria rispetto a g? È simmetrico rispetto a g? Motiva le risposte.

Esercizio 4. Scrivi una isometria affine $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfi le proprietà seguenti:

(1) $f(\pi) \cap \pi = \emptyset$ dove π è il piano affine $\pi = \{x_3 = 0\}$;
(2) $f(r) = r$ dove r è la retta affine

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Scrivi inoltre una isometria affine $g(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $g(\pi) \cap \pi = \emptyset$ e r sia l'unica retta affine invariante, cioè l'unica retta r per cui $g(r) = r$.

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Siano v_1 e v_2 autovettori con autovalori λ_1 e λ_2. Se non fossero indipendenti, sarebbero uno multiplo dell'altro e otterremmo quindi $v_1 = kv_2$ per qualche $k \neq 0$ (ricordiamo che un autovettore è sempre non nullo per definizione, quindi $v_1, v_2 \neq 0$). Applicando T otteniamo $T(v_1) = T(kv_2)$ e svolgendo questa uguaglianza troviamo
$$k\lambda_1 v_2 = \lambda_1 v_1 = T(v_1) = T(kv_2) = kT(v_2) = k\lambda_2 v_2$$
che è assurdo perché $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

b) Sì. Se $v_1, \ldots, v_n$ è una base di autovettori per T, allora è chiaramente anche una base di autovettori per T^2: infatti $T(v_i) = \lambda v_i$ implica
$$T^2(v_i) = T(\lambda v_i) = \lambda T(v_i) = \lambda^2 v_i$$
e quindi i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono autovettori anche per T^2, con autovalori $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$.

Esercizio 2. Calcoliamo il polinomio caratteristico:
$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} t-1-\lambda & 2t & t \\ 0 & t-1-\lambda & 0 \\ 2 & t+2 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$
Svolgendo lungo la seconda riga troviamo
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (t-1-\lambda)\big((1-\lambda)(t-1-\lambda) - 2t\big) \\ &= (t-1-\lambda)(\lambda^2 - t\lambda + t - 1 - 2t) = (t-1-\lambda)(\lambda^2 - t\lambda - 1 - t). \end{aligned}$$
L'equazione di secondo grado ha $\Delta = t^2 + 4t + 4 = (t+2)^2$, quindi ha soluzioni reali per ogni $t \in \mathbb{R}$. Il polinomio $p(\lambda)$ ha sempre tre radici reali:
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= t-1, \\ \lambda_2 &= -1, \\ \lambda_3 &= t+1. \end{aligned}$$
Quando queste sono distinte la matrice è diagonalizzabile. Restano da considerare i casi:

- $\lambda_1 = \lambda_2$, cioè $t = 0$. In questo caso $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 1$. La matrice ha la forma
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si verifica che $(-1) = (-1) = 2$. Quindi la matrice è diagonalizzabile.
- $\lambda_1 = \lambda_3$ non può mai accadere.
- $\lambda_2 = \lambda_3$, cioè $t = -2$. In questo caso $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. La matrice ha la forma
$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si verifica che $(-1) = 1 < 2 = (-1)$. Quindi la matrice non è diagonalizzabile.

Riassumendo, la matrice è diagonalizzabile se e solo se $t \neq -2$.

Esercizio 3.

(1) Consideriamo la base canonica
$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
di $M(2)$. Si verifica (esaminando i vari casi) che la matrice associata a g rispetto a questa base è
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcolando gli autovalori si trova che la segnatura è $(3, 1, 0)$.

(2) Il sottospazio S ha dimensione 3 ed è generato dalle matrici

$$S_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice associata a $g|_S$ rispetto a questa base è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice è definita positiva: la segnatura di $g|_S$ è $(3, 0, 0)$.

(3) Vale

$$g(T(A), T(B)) = g({}^tA, {}^tB) = ({}^tA\, {}^tB) = ({}^t(BA)) = (BA) = g(B, A) = g(A, B)$$

quindi T è una isometria. Analogamente

$$g(T(A), B) = g({}^tA, B) = ({}^tAB) = ({}^t({}^tAB)) = ({}^tBA) = g(T(B), A)) = g(A, T(B))$$

quindi T è simmetrica.

Esercizio 4. Notiamo subito che π e r sono ortogonali. La traslazione $f(x) = x + e_3$ soddisfa le proprietà (1) e (2). Per fare sì che r sia l'unica retta affine invariante, possiamo prendere come g una qualsiasi rototraslazione con asse r. Ad esempio, una rototraslazione con direzione parallela a r e di angolo π è del tipo $g(x) = Ax + b$ con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resta solo da determinare il vettore $b \in \mathbb{R}^3$ in modo che r sia l'asse della rototraslazione. Sappiamo che $b = g(0)$ e geometricamente vediamo che se r è l'asse allora $g(0)$ è ottenuto ruotando l'origine di π intorno a r e poi traslando lungo r di un certo passo $b_3 \neq 0$. Quindi

$$b = g(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Possiamo scegliere ad esempio $b_3 = 1$. Ovviamente è possibile anche scegliere un angolo diverso da π e un passo diverso da $b_3 = 1$ ed ottenere un'altra g che soddisfa le condizioni richieste.

Compito di algebra lineare del 6 giugno 2016

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Siano V e W due sottospazi di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$. Quali sono le possibili dimensioni del sottospazio $V \cap W$? Motiva la risposta in modo completo.

Esercizio 2. Considera la rotazione $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = Ax$, definita dalla matrice ortogonale

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Determina l'asse r ed il coseno dell'angolo di rotazione di f.
(2) Trova un vettore non nullo $b \in \mathbb{R}^3$ tale che $g(x) = Ax + b$ non abbia punti fissi.
(3) Trova un vettore non nullo $b \in \mathbb{R}^2$ tale che $g(x) = Ax + b$ abbia almeno un punto fisso.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leqslant 2$. Considera il prodotto scalare g su $\mathbb{R}_2[x]$ definito nel modo seguente.

$$g(p, q) = p'(1)q'(1) + p(0)q(0)$$

dove p' e q' indicano le derivate dei polinomi p e q.

(1) Calcola la segnatura di g.
(2) Determina quali sono i polinomi p tali che $g(q, p) = 0$ per ogni $q \in \mathbb{R}_2[x]$.

Esercizio 4. Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Data una matrice A, consideriamo l'applicazione lineare $T_A \colon M(2) \to M(2)$ seguente:

$$T_A(X) = AX.$$

(1) Dimostra che T_A è diagonalizzabile nel caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Più in generale, dimostra che A è diagonalizzabile se e solo se T_A è diagonalizzabile.

Soluzioni

Esercizio 1. La formula di Grasmann dice che

$$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V + W) = 6 - \dim(V + W).$$

Notiamo che

$$V \subset V + W \subset \mathbb{R}^4$$

quindi $V + W$ può avere solo dimensione 3 o 4. Ne segue che $V \cap W$ può avere solo dimensione 3 (se $V = W$) e 2 (se $V \neq W$). Entrambi i casi possono accadere, ad esempio:

- se $V = W = \text{Span}(e_1, e_2, e_3)$ allora $\dim V \cap W = 3$;
- se $V = \text{Span}(e_1, e_2, e_3)$ e $W = \text{Span}(e_1, e_2, e_4)$ allora $\dim V \cap W = 2$.

Esercizio 2.

(1) Si verifica che l'autospazio V_1 di f è generato dal vettore

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'asse della rotazione è $r = \text{Span}(v) = V_1$.

(2) Se $b = v$ allora g è una rototraslazione e quindi non ha punti fissi.

(3) Consideriamo il piano $\pi = v^\perp$ ortogonale a v. Se $b \in \pi$, ad esempio se

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora g fissa il piano π e si verifica che ha un punto fisso in π perché il sistema $(A - I)x = -b$ ha soluzione.

Esercizio 3.

(1) La matrice associata a g nella base $\{1, x, x^2\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che la segnatura è $(2, 0, 1)$ in uno dei metodi seguenti:
- gli autovalori della matrice sono $0, 1, 5$;
- A ha rango 2 e quindi $i_0 = 3 - 2 = 1$; la restrizione di A al piano generato da e_1, e_2 è definita positiva e quindi $i_+ \geqslant 2$.

(2) Dobbiamo determinare il radicale di g, che in coordinate conicide con $\ker A$. Otteniamo $\ker A = \text{Span}(0, 2, -1)$ e quindi il radicale è generato da $2x - x^2$. I polinomi sono tutti quelli del tipo $p(x) = -ax^2 + 2ax$ per qualche $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.

(1) Nella base canonica di $M(2)$ formata da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata a T_A è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che questa matrice è diagonalizzabile perché gli autovalori 1 e 2 hanno entrambi molteplicità geometrica 2.

(2) Ci sono due implicazioni da mostrare.

- A è diagonalizzabile $\Longrightarrow$ T_A diagonalizzabile. Per ipotesi esiste una base $\{v_1, v_2\}$ di autovettori per A, con autovalori λ_1, λ_2.
  Indichiamo con (vw) la matrice 2×2 avente come colonne $v, w \in \mathbb{R}^2$. Notiamo che $Av_i = \lambda_i v_i$ implica che $A(v_i 0) = \lambda_i (v_i 0)$. Quindi le matrici quadrate $(v_1 0), (v_2 0), (0 v_1), (0 v_2)$ sono autovettori per T_A, con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2$. Queste sono indipendenti e allora formano una base di $M(2)$, quindi T_A è diagonalizzabile.
- T_A è diagonalizzabile $\Longrightarrow$ A diagonalizzabile. Per ipotesi esiste una base M_1, M_2, M_3, M_4 di autovettori per T_A, con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Ciascuna M_i è una matrice 2×2 e abbiamo $T_A(M_i) = AM_i = \lambda_i M_i$. Segue che qualsiasi colonna non nulla di qualsiasi M_i è un autovettore per A. Fra le 8 colonne a disposizione ce ne sono almeno due indipendenti, perché le matrici $M_1, \ldots, M_4$ sono indipendenti.

È anche possibile usare il teorema di diagonalizzabilità e mostrare che le sue ipotesi sono valide per A se e solo se lo sono per la matrice associata a T_A.

Compito di algebra lineare del 27 giugno 2016

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Determina tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$e^{2z} - e^z - 2 = 0.$$

Esercizio 2. Sia $n \geqslant 0$ un numero naturale fissato e $\mathbb{R}_n[x]$ lo spazio di tutti i polinomi di grado al più n. Considera l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ definito come

$$T(p) = (x+1)p'$$

dove p' è la derivata del polinomio p.

(1) Determina gli autovalori di T.
(2) L'endomorfismo T è diagonalizzabile? Motiva la risposta.

Esercizio 3. Data una retta $r \subset \mathbb{R}^3$ vettoriale (cioè passante per l'origine), indichiamo con $p_r\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su r. Considera la retta $s \subset \mathbb{R}^3$ seguente:

$$s = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivi la matrice 3×3 che rappresenta p_s rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) Sia $l \subset \mathbb{R}^3$ un'altra retta vettoriale. Considera l'endomorfismo $T = p_l \circ p_s$ di $\mathbb{R}^3$.
   (a) Determina la dimensione dell'immagine di T, al variare di l.
   (b) Mostra che T è sempre diagonalizzabile.

Esercizio 4. Considera al variare di $h \in \mathbb{R}$ la conica affine

$$C_h = \left\{ x^2 - 2hxy + \frac{1}{2}y^2 - 2hx + \frac{1}{2} = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(1) Scrivi l'equazione omogenea che descrive il completamento proiettivo $\overline{C_h} \subset \mathbb{P}^2$ di C_h. Determina per quali h l'insieme $\overline{C_h} \subset \mathbb{P}^2$ non è vuoto.
(2) Per quali h la conica affine C_h è un'ellisse? un'iperbole? una parabola?
(3) Nei casi in cui C_h sia una ellisse o una iperbole, se ne determini il centro (che dipende da h).

Soluzioni

Esercizio 1. Sostituendo $w = e^z$ otteniamo $w^2 - w - 2 = 0$ che ha soluzioni $w = -1, 2$. Dobbiamo quindi risolvere separatamente le equazioni

$$e^z = -1, \qquad e^z = 2.$$

Otteniamo rispettivamente

$$z = \pi i + 2k\pi i, \qquad z = \ln 2 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2. Usiamo la base canonica $\{1, x, \ldots, x^n\}$. Vediamo che

$$T(1) = 0,$$
$$T(x^k) = (x+1)kx^{k-1} = kx^k + kx^{k-1}, \ \forall k > 0.$$

Quindi la matrice associata a T nella base canonica è una matrice triangolare superiore con elementi nella diagonale $0, 1, \ldots, n$. Gli autovalori sono proprio $0, 1, \ldots, n$ ed essendo distinti T è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Se $r = \text{Span}(w)$, la proiezione su r è

$$p_r(v) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w.$$

(1) In coordinate, con la retta s otteniamo

$$p_s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y-z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ -x-y+z \end{pmatrix}$$

quindi la matrice associata è

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) (a) L'immagine di una proiezione su una retta ha sempre dimensione 1, quindi l'immagine di T ha dimensione 1 o 0. La dimensione è zero solo quando l e s sono ortogonali.
(b) Quando l e s sono ortogonali, l'endomorfismo T è nullo e quindi è diagonalizzabile. Se non sono ortogonali, una base di autovettori è $\{v_1, v_2, v_3\}$ dove v_1 è un generatore di l, e v_2, v_3 sono una base del piano $s^\perp$.

Esercizio 4.

(1) L'equazione omogenea è

$$\overline{C_h} = \left\{ x_1^2 - 2hx_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 2hx_1x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{P}^2.$$

La matrice associata all'equazione è

$$\begin{pmatrix} 1 & -h & -h \\ -h & \frac{1}{2} & 0 \\ -h & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante è $\frac{1}{4} - h^2$. La matrice 2×2 in basso a destra è definita positiva, quindi $i_+ \geqslant 2$ per ogni h. Ne deduciamo che:
- se $h^2 > \frac{1}{4}$, la segnatura è $(2, 1, 0)$ e la conica è una circonferenza;
- se $h^2 < \frac{1}{4}$, la segnatura è $(3, 0, 0)$ e la conica è vuota;
- se $h = \pm\frac{1}{2}$, la segnatura è $(2, 0, 1)$ e la conica è un punto.

Quindi $\overline{C_h}$ non è vuoto precisamente per $|h| \geqslant \frac{1}{2}$.

(2) Ci interessano solo i casi $h^2 > \frac{1}{4}$ in cui il completamento è una circonferenza. La sottomatrice 2×2 in alto a sinistra ha determinante $\frac{1}{2} - h^2$. Quindi:
- se $h^2 > \frac{1}{2}$, la conica è una iperbole;
- se $\frac{1}{4} < h^2 < \frac{1}{2}$, la conica è una ellisse;
- se $h^2 = \frac{1}{2}$, la conica è una parabola.

(3) Il centro è il punto $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che soddisfa l'equazione

$$\begin{pmatrix} 1 & -h \\ -h & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Risolvendo troviamo

$$C = \frac{h}{1-2h^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2h \end{pmatrix}.$$

Compito di algebra lineare del 18 luglio 2016

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

a) Si dia la definizione di cosa sia un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale.
b) Sia V uno spazio vettoriale reale e sia g un prodotto scalare su V. Dimostrare che se $g(v, v) = 0$ per ogni $v \in V$ allora $g(u, v) = 0$ per ogni $\in V$.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 nella variabile x. Sia $T : V \longrightarrow V$ l'applicazione definita da

$$T(p(x)) = p(0)x^3 + p'(x).$$

a) Si calcoli il polinomio caratteristico di T e si dica se T è diagonalizzabile.
b) Si determini T^{20}.

Esercizio 3. Costruisci una isometria affine

$$f(x) = Ax + b$$

che soddisfi contemporaneamente tutte le proprietà seguenti:

- $\det A < 0$;
- f non ha punti fissi;
- $f(\pi) = \pi$ con $\pi = \{y + z = 0\}$.

Esercizio 4. Considera il prodotto scalare g su $\mathbb{R}^3$ dato da

$$g(x, y) = {}^{\mathrm{t}}xSy$$

con

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) calcola la segnatura di g;
b) mostra che esiste un piano $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che la restrizione $g|_W$ sia un prodotto scalare degenere.

Esercizio 1. a) Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una applicazione $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

i) $g(\lambda u, v) = \lambda g(u, v)$ per ogni $u, v \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
ii) $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$ per ogni $u, v, w \in V$;
iii) $g(u, v) = g(v, u)$ per ogni $u, v \in V$.

Si può formulare la stessa definizione in altri modi equivalenti.

b) Siano, $u, v \in V$ allora

$$g(u, v) = \frac{1}{2}\big(g(u + v, u + v) - g(u, u) - g(v, v)\big).$$

Poiché per ipotesi i tre termini sulla destra sono zero lo è anche $g(u, v)$.

Esercizio 2. Sia $p_i = x^{i-1}$ per $i = 1, 2, 3, 4$ allora $p_1, \ldots, p_4$ è una base di V. Abbiamo

$$T(p_1) = p_4; \quad T(p_2) = p_1; \quad T(p_3) = 2p_2; \quad T(p_4) = 3p_3.$$

La matrice associata a T rispetto alla base $p_1, \ldots, p_4$ è quindi

$$[T]^{p_i}_{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che $p_T(t) = t^4 - 6$, in particolare gli autovalori di T sono $\pm\sqrt[4]{6}$ e $\pm i\sqrt[4]{6}$. L'applicazione T non è diagonalizzabile perché non tutti gli autovalori sono reali.

b) Ricordiamo che per il teorema di Cayley-Hamilton $p_T(T) = 0$ quindi $T^4 = 6Id$ da cui $T^{20} = (T^4)^5 = 6^5\, Id = 7776\, Id$.

Esercizio 3. Consideriamo la riflessione R rispetto al piano π. Questa è una isometria di determinante -1 che lascia fissi i punti di π e scambia i due semispazi definiti da π, quello definito da $y + z > 0$ e quello definito da $y + z < 0$. Se componiamo R con una traslazione di un vettore non nullo $b \in \pi$ otteniamo una applicazione T con le proprietà richieste.

Calcoliamo ora esplicitamente T. Sia

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora π è il piano ortogonale a u quindi R è definito dalla formula: $R(v) = v - 2\frac{(u,v)}{u,u}u$ ovvero, in coordinate, da

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - (y + z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}.$$

La matrice associata a R rispetto alla base standard è

$$A = [R]^{e_i}_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come vettore b possiamo scegliere qualsiasi vettore non nullo di π. Scegliendo per esempio $b = e_1$ otteniamo

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ -z \\ -y \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. a) Consideriamo la base $v_1 = e_2$, $v_2 = e_3$ e $v_3 = e_1$ allora la matrice associata a g in questa base è la matrice

$$S' = [g]_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I determinanti dei minori principali sono $1, -1, 1$ quindi la forma bilineare ha segnatura $(2, 1, 0)$.

b) Prendiamo un vettore u isotropo e non nullo e costruiamo il suo ortogonale W. Poiché g è non degenere la dimensione di W è 2 inoltre poichè u è isotropo avremo $u \in W$ e quindi $g|_{W\times W}$ è degenere. Possiamo prendere per esempio $u = e_1$ allora l'ortogonale di u rispetto a g è dato dall'equazione

$$g(e_1, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = y + z.$$

Quindi W è definito dall'equazione $y + z = 0$ (e quindi ha dimensione 2) e contiene il vettore e_1 che è ortogonale a tutto W e quindi $g|_{W\times W}$ è degenere.

Compito di algebra lineare del 8 settembre 2016

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

(a) Enuncia il teorema di Cayley–Hamilton.
(b) Sia A una matrice 3×3 triangolare superiore a coefficienti complessi tale che $(A) = (A^2) = 0$. Dimostra che $A^3 = \det A \cdot I$, dove I è la matrice identità 3×3.

Esercizio 2. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia $T: M(2) \to M(2)$ l'endomorfismo definito nel modo seguente:

$$T(X) = AX - XA.$$

(a) Calcola la dimensione dell'immagine di T.
(b) L'endomorfismo T è diagonalizzabile? Motiva la risposta.
(c) Dimostra che per qualsiasi altra scelta della matrice A iniziale la dimensione dell'immagine di T è sempre minore o uguale a 3.
(d) Dimostra che per qualsiasi altra scelta della matrice A iniziale la dimensione dell'immagine di T è sempre minore o uguale a 2.

Esercizio 3. Sia U il piano di $\mathbb{R}^3$ definito da $x+y+z = 0$ e sia V il piano di $\mathbb{R}^3$ definito da $x+2y-z = 0$. Si considerino le riflessioni r_U e r_V di $\mathbb{R}^3$ rispetto ai piani U e V. Sia $T = p_U \circ p_V$.

(a) Mostra che T è una rotazione intorno ad un asse.
(b) Determina l'asse di T e il coseno dell'angolo di rotazione.

Esercizio 4. Sia g il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ definito da

$$g(x, y) = {}^{t}xSy$$

con

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determina una base ortogonale per g.
(b) Esiste una base formata da due vettori isotropi? Motiva la risposta.
(c) Determina una applicazione lineare $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che sia una isometria rispetto al prodotto scalare g e tale che 2 sia un autovalore per T.
(d) È vero che qualsiasi isometria per g è diagonalizzabile? Motiva la risposta.

Esercizio 1.

(a) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A, allora $p(A) = 0$.

(b) La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} a & ? & ? \\ 0 & b & ? \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ? & ? \\ 0 & b^2 & ? \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$p(t) = (a-t)(b-t)(c-t) = -t^3 + (a+b+c)t^2 - (ab+bc+ca)t + abc.$$

Dalle ipotesi segue che $a+b+c=0$ e $a^2+b^2+c^2=0$ e quindi

$$0 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

implica che anche $ab+bc+ca=0$. Allora il polinomio caratteristico è semplicemente $p(t) = -t^3 + \det A$. Dal teorema di Cayley-Hamilton deduciamo che $p(A)=0$ e quindi $-A^3 + \det A \cdot I = 0$.

Esercizio 2. La matrice associata a T nella base canonica di $M(2)$ è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) La dimensione è il rango di B, cioè due.

(b) Il polinomio caratteristico di B è $p(t) = t^2(t+1)(t-1)$. L'autovalore 0 ha molteplicità geometrica due, quindi B è diagonalizzabile. Quindi T è diagonalizzabile.

(c) La matrice I appartiene al nucleo di T, perché $T(I) = A - A = 0$. Quindi il nucleo di T ha dimensione almeno uno, e allora l'immagine ha dimensione al massimo 3 per il teorema della dimensione.

(d) Anche la matrice A appartiene al nucleo di T, perché $T(A) = A^2 - A^2 = 0$. Se A e I sono indipendenti, concludiamo che il nucleo ha dimensione almeno 2 e quindi l'immagine ha dimensione al massimo 2. Se sono dipendenti, allora $A = kI$ per qualche $k \in \mathbb{R}$ e deduciamo che $T(X) = kA - kA = 0$ per ogni X e quindi l'immagine ha dimensione zero.

(c'-d') Per risolvere i punti (c) e (d), è anche possibile scrivere la matrice A come

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e dedurre che la matrice associata B è

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango minore o uguale a due: l'ultima colonna è chiaramente multiplo della prima, e le prime tre colonne A^1, A^2, A^3 sono dipendenti tramite la relazione

$$(a-d)A^1 + bA^2 + cA^3.$$

Esercizio 3. Le matrici che rappresentano r_U e r_V rispetto alla base canonica sono

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'isometria T è rappresentata dal prodotto di queste matrici

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -7 \\ -8 & -1 & -4 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che i conti sono giusti controllando che questa sia una matrice ortogonale.

(a) Il prodotto di due riflessioni è una matrice ortogonale con determinante positivo e quindi è una rotazione intorno ad un asse per un teorema fatto a lezione.

(b) Cerchiamo un autovettore di A con autovalore 1 e troviamo che l'asse è generato dal vettore

$$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, possiamo notare che l'intersezione $r = U \cap V$ è fissata da T e quindi è l'asse della rotazione. Si verifica che r è generata dal vettore v descritto sopra. L'angolo θ di rotazione è tale che $2\cos\theta + 1 = A = -\frac{1}{9}$. Quindi $\cos\theta = -\frac{5}{9}$.

Esercizio 4.

(a) Prendiamo il vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e determiniamo l'ortogonale

$$v_1^{\perp} = \{x + 2y = 0\}.$$

In particolare $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è ortogonale a v_1 e quindi v_1, v_2 formano una base ortogonale.

(b) I vettori isotropi sono tutti i vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tali che

$$x^2 + 4xy + y^2 = 0.$$

Per trovare delle soluzioni si può ad esempio imporre $x = 1$ e trovare y. In particolare i vettori seguenti sono isotropi ed indipendenti e quindi formano una base:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(c) Nella base w_1, w_2 il prodotto scalare si scrive come la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Usiamo d'ora in poi questa base perché è più comoda. Consideriamo un endomorfismo diagonale, del tipo

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Notiamo che

$${}^{t}MAM = -6 \begin{pmatrix} 0 & ab \\ ab & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi M definisce una isometria se e solo se $ab = 1$. Prendendo a=2 e $b = \frac{1}{2}$ otteniamo una isometria con autovalore 2.

(d) I vettori isotropi formano due rette $\mathrm{Span}(w_1)$ e $\mathrm{Span}(w_2)$. Una isometria T deve mandare vettori isotropi in vettori isotropi, quindi preserva o scambia le due rette. Se le preserva, queste sono assi per T e quindi T è diagonalizzabile. Se le scambia, nella base w_1, w_2 si scrive come

$$M = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$

Come sopra ${}^{t}MAM = A$ implica che $cd = 1$ e quindi questa matrice è diagonalizzabile perché ha due autovalori reali distinti $\pm\sqrt{cd}$.