Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.4 del 2014

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$. Sia $m =$ numero equazioni, $n =$ numero incognite, $r = \mathrm{rg}(A)$, $r' = \mathrm{rg}(A \,|\, b\,)$. Indicare il numero delle eventuali soluzioni nei seguenti casi:

a) $m = 5 \quad n = 4 \quad r = 3 \quad r' = 4$

b) $m = 5 \quad n = 4 \quad r = 4 \quad r' = 4$

c) $m = 5 \quad n = 4 \quad r = 3 \quad r' = 3$

• Si consideri il sistema omogeneo $\mathcal{S} : Ax = 0$ nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\,; \end{cases}$$

si determini una base ortonormale del sottospazio vettoriale V' di $\mathbb{R}^5$, costituito dalle soluzioni di $\mathcal{S}$.

Esercizio 2. Determinare le soluzioni complesse (z, w) del sistema

$$\begin{cases} \exp(2\,z + w) = (1 - i)\,\exp(w) \\ w^3 = -1 \end{cases}$$

Tra le soluzioni determinate individuare quelle aventi parte immaginaria minore di $6\,\pi$.

Esercizio 3. Determinare l'equazione cartesiana del cono circolare retto con il vertice nell'origine e tangente alla sfera di equazione $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$.
Determinare successivamente l'equazione di una sfera avente centro sul piano $\pi : 2\,x + 2\,y + z = 20$ e tangente internamente al cono determinato in precedenza.

Esercizio 4. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rapresenta la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^2$ su una retta: quale?
La matrice $A = \begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}$ rappresenta più in generale la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^2$ su una retta, secondo la direzione (a, b): dimostralo.
Studiare poi la triangolabilità e la diagonalizzabilità di AB e di BA.

Esercizio 5. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche rappresentato nella forma

$$\mathcal{F} : (y + 1)^2 - x^2 + \lambda(y^2 - 2\,y) = 0\,.$$

a) Si determinino i punti base del fascio (ed altre eventuali proprietà geometriche comuni a tutte le coniche del fascio).
b) Si studi il fascio stesso.
c) Determinare, in dipendenza del parametro λ, le coordinate del centro della generica conica a centro del fascio.
d) Si determini la proiettività che lascia fissa punto per punto la retta $x_2 = 0$ e scambia tra loro i punti $(3, 2, 1)$ e $(-3, 2, 1)$; qual è l'immagine mediante tale proiettività della parabola del fascio $\mathcal{F}$?