Cognome
Nome
Matricola

Corso di laurea in Ing. Edile-Architettura
Compito scritto di Geometria – 14/09/2009

1. È dato l'operatore lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) dalla seguente matrice A_k (con $k \in \mathbb{R}$):
$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & k & 0 \end{pmatrix}.$$
   a) Dire per quali valori di k il sistema $f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 \\ 2k \\ -4k \end{pmatrix}$ ha soluzione, e determinare esplicitamente le soluzioni di tale sistema (per tutti i valori di k per i quali esistono soluzioni) utilizzando un metodo a piacere. (3.5 punti)
   b) Discutere per quali valori del parametro reale k la matrice A_k è diagonalizzabile e/o triangolabile in campo reale. (4 punti)
   (**Suggerimento:** Per il calcolo delle radici caratteristiche, dopo aver scritto $(A_k - \lambda I)$, sostituire al posto della seconda colonna la seconda colonna meno il doppio della terza, quindi svilupare secondo la prima riga raccogliendo un opportuno fattore. Dalla domanda a) si capisce quanto vale uno degli autovalori).
   c) Posto $k = 5$, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_5. (3 punti)
   (**Suggerimento:** Sfruttare intelligentemente il risultato della domanda a)).
2. a) Determinare le soluzioni in campo complesso dell'equazione $\mathrm{Re}\left(e^{i\pi|z|} - 1\right) = 0$ e rappresentarle nel piano di Gauss. (2 punti)
   b) Determinare le soluzioni in campo complesso della disequazione
   $\mathrm{Re}(|z(1-i)+\overline{z}(1+i)|+z(1+i) + \overline{z}(1-i)) \leq 0$ e rappresentarle nel piano di Gauss. (2 punti)
   c) Determinare le soluzioni in campo complesso del sistema $\begin{cases} \mathrm{Re}\left(e^{i\pi|z|} - 1\right) = 0 \\ \mathrm{Re}(|z(1-i)+\overline{z}(1+i)|+z(1+i) + \overline{z}(1-i)) \leq 0 \end{cases}$ ed indicarle nel piano di Gauss. (0.5 punti)
3. a) Scrivere le equazioni della affinità T che manda $(0, 0)$ in $(-1, 1)$, $(1, 0)$ in $(-1, 3)$ e $(0, 1)$ in $(-3, 1)$ e della affinità inversa T^{-1} (1.5 punti).
   b) Mostrare che T trasforma una qualsiasi retta r in una retta r' perpendicolare a r. (1.5 punti).
   c) Data la conica γ di equazione $x^2 + y^2 - 2 = 0$, determinare l'equazione della conica γ' trasformata di γ secondo T. (0.5 punti)
   d) Dopo aver scritto in coordinate omogenee il fascio $\mathcal{F}$ generato da γ e γ', mostrare che esso è formato solamente da circonferenze e da due coniche degeneri (da determinare ed eventualmente fattorizzare). Determinare l'unico punto base P di $\mathcal{F}$. (3.5 punti)
   (**Suggerimento:** per il calcolo di $\det(\tilde{A})$, sostituire al posto della prima colonna la somma fra la prima e la seconda colonna, quindi al posto della seconda riga la differenza fra la seconda e la prima riga, infine sviluppare secondo la prima colonna).
   e) Determinare la polare di P rispetto a una qualunque conica di $\mathcal{F}$. Cosa si osserva? (1 punto)
4. È data nello spazio la curva γ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos(t) + \sin(t) \\ y = -\sqrt{3}\cos(t) + \sin(t) \\ z = -2\sin(t) - 1 \end{cases}$, con $t \in [0, 2\pi]$.
   a) Dimostrare che γ è una curva piana, e determinare il piano π su cui essa giace (1 punto).
   b) Determinare l'equazione del cilindro $\mathcal{C}$ avente le generatrici perpendicolari a π e γ come direttrice. (3 punti)
   (**Suggerimento:** Dopo aver scritto le equazioni parametriche di una generica retta diretta come la giacitura di π e passante per un punto di γ, eliminare il parametro ricavandolo dalla somma delle tre equazioni, poi ricavare $\cos(t)$ e $\sin(t)$ dalle prime due equazioni ed infine sfruttare la relazione trigonometrica fondamentale).
   c) Mostrare che l'intersezione di $\mathcal{C}$ col piano $z = 0$ è un'ellisse $\mathcal{E}$, e determinarne centro di simmetria, assi di simmetria e lunghezze dei semiassi. (3 punti)
   d) Determinare l'equazione cartesiana della superficie che si ottiene facendo ruotare $\mathcal{E}$ intorno alla retta r di equazioni $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$. (2 punti)

1		
2		
3		
4		