Cognome
Nome
Matricola

Corso di laurea in Ing. Edile-Architettura
Compito scritto di Geometria – 05/02/2009

1. È dato l'operatore lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) dalla seguente matrice A_k (con $k \in \mathbb{R}$):
$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ k & 1-k & k \end{pmatrix}.$$
   a) Determinare, al variare di k, $\dim(\mathrm{Ker}(f_k))$ e $\dim(\mathrm{Im}(f_k))$, e le basi (a scelta fra tutte quelle possibili) di $\mathrm{Ker}(f_k)$ e $\mathrm{Im}(f_k)$. (3.5 punti)
   b) Dire per quali valori di k il sistema $\begin{cases} kx_1 + x_3 = 0 \\ kx_2 + x_3 = 0 \\ kx_1 + (1-k)x_2 + kx_3 = 1 - k^2 \end{cases}$ ha soluzione, e determinarle esplicitamente utilizzando un metodo a piacere. (2.5 punti)
   c) Discutere per quali valori del parametro reale k la matrice A_k è diagonalizzabile e/o triangolabile in campo reale. (2.5 punti)
   d) Per un k reale qualsiasi per cui A_k è diagonalizzabile, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_k (in generale tali autovettori dipenderanno quindi da k). (2.5 punti)

2. a) Determinare le soluzioni in campo complesso dell'equazione $(\mathrm{e}^{\pi z})^2 - (\mathrm{e}^{3\pi})^2 = 0$ e rappresentarle nel piano di Gauss. (1.5 punti)
   b) Determinare le soluzioni in campo complesso della disequazione $\sqrt{3}|z|^2 - \mathrm{Im}(z^2 - \overline{z}^2) \leq 0$ e indicare la regione delle soluzioni nel piano di Gauss. (2 punti)
   c) Determinare le soluzioni in campo complesso del sistema $\begin{cases} (\mathrm{e}^{\pi z})^2 - (\mathrm{e}^{3\pi})^2 = 0 \\ \sqrt{3}|z|^2 - \mathrm{Im}(z^2 - \overline{z}^2) \leq 0 \end{cases}$ ed indicarle nel piano di Gauss. (1.5 punti)

3. a) Scrivere l'equazione del fascio di coniche tangenti nel punto $(2,\ 0)$ alla retta di equazione $y = 0$ e nel punto $(2,\ 4)$ alla retta di equazione $2x - y = 0$. Scrivere esplicitamente le coniche degeneri di tale fascio. (3 punti)
   b) Mostrare che il fascio determinato al punto a) ha una sola parabola, scriverne l'equazione e determinarne le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse di simmetria. (3 punti)
   c) Determinare il luogo dei centri di simmetria di (quasi) tutte le coniche del fascio. (2 punti)

4. È data la curva γ di equazioni $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 50 \\ 3x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$.
   a) Mostrare che γ è una circonferenza; determinarne centro C, raggio e equazioni parametriche. (3 punti)
   b) Scrivere le equazioni della retta tangente a γ nel suo punto P di coordinate $\left(\frac{21}{5},\ 4,\ \frac{17}{5}\right)$. (2.5 punti)
   (Suggerimento: determinare la direzione della retta per C e P e trovare la direzione ortogonale sia a tale retta che all'asse di γ)
   c) Scrivere l'equazione della superficie che si ottiene ruotando l'asse di γ intorno alla retta $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ (2.5 punti)

1		
2		
3		
4		