AAB Compitino di algebra lineare di martedì 12 febbraio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati e le lettere AAB. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 4 delle prime 5 domande e alla domanda 6.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $u = (1, 0, 2)$ e $v = (2, 1, 1)$ e sia θ l'angolo $u0v$, ovvero l'angolo compreso tra le due semirette che partono dall'origine e hanno direzione u e v rispettivamente. Calcolare $\cos\theta$.

Risposta: $\cos\theta =$

Domanda 2. Calcolare le soluzioni dell'equazione $z^2 = 3 + 4i$.

Risposta: Le soluzioni sono

Domanda 3. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det(A^3)$.

Risposta: $Det(A^3) =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare surgettiva e sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 2. Sapendo che $\dim N(F) \cap U = 1$ determinare $\dim N(F) + U$.

Risposta: $\dim N(F) + U =$

Domanda 5. $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare. Sia v_1, v_2 una base di $\mathbb{R}^2$ diversa dalla base standard. Se

$$[F]^{v_1,v_2}_{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Quali delle seguenti frasi sono sempre vere (ovvero vere comunque si sia scelta la base v_1, v_2):

A: $F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

B: $F(v_1 + v_2) = e_1 + 3e_2$

C: $F(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

D: $\dim N(F) = 0$

Nota bene: le frasi vere potrebbero essere anche più d'una.

Risposta: le frasi vere sono

Domanda 6. Sia V un K-spazio vettoriale e siano u, v, w degli elementi di V. Cosa il sottospazio vettoriale generato da u, v, w? Dare la definizione.

ABA Compitino di algebra lineare di martedì 12 febbraio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati e le lettere ABA. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 4 delle prime 5 domande e alla domanda 6.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $u = (1, 1, 1)$ e $v = (0, -1, 2)$ e sia θ l'angolo $u0v$, ovvero l'angolo compreso tra le due semirette che partono dall'origine e hanno direzione u e v rispettivamente. Calcolare $\cos\theta$.

Risposta: $\cos\theta =$

Domanda 2. Calcolare le soluzioni dell'equazione $z^2 = 3 - 4i$.

Risposta: Le soluzioni sono

Domanda 3. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det(A^3)$.

Risposta: $Det(A^3) =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare surgettiva e sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^7$ di dimensione 3. Sapendo che $\dim N(F) \cap U = 2$ determinare $\dim N(F) + U$.

Risposta: $\dim N(F) + U =$

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare. Sia v_1, v_2 una base di $\mathbb{R}^2$ diversa dalla base standard. Se

$$[F]^{v_1,v_2}_{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Quali delle seguenti frasi sono sempre vere (ovvero vere comunque si sia scelta la base v_1, v_2):

A: $F(v_1 + v_2) = 2e_1 + 4e_2$

B: $F(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

C: $\dim N(F) = 0$

D: $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nota bene: le frasi vere potrebbero essere anche più d'una.

Risposta: le frasi vere sono

Domanda 6. Sia V un K-spazio vettoriale e siano u, v, w degli elementi di V. Cosa il sottospazio vettoriale generato da u, v, w? Dare la definizione.

BAA Compitino di algebra lineare di martedì 12 febbraio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati e le lettere BAA. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 4 delle prime 5 domande e alla domanda 6.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $u = (2, 0, -1)$ e $v = (1, 2, 1)$ e sia θ l'angolo $u0v$, ovvero l'angolo compreso tra le due semirette che partono dall'origine e hanno direzione u e v rispettivamente. Calcolare $\cos\theta$.

Risposta: $\cos\theta =$

Domanda 2. Calcolare le soluzioni dell'equazione $z^2 = -3 + 4i$.

Risposta: Le soluzioni sono

Domanda 3. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det(A^3)$.

Risposta: $Det(A^3) =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare surgettiva e sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 2. Sapendo che $\dim N(F) \cap U = 1$ determinare $\dim N(F) + U$.

Risposta: $\dim N(F) + U =$

Domanda 5. $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare. Sia v_1, v_2 una base di $\mathbb{R}^2$ diversa dalla base standard. Se

$$[F]^{v_1,v_2}_{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quali delle seguenti frasi sono sempre vere (ovvero vere comunque si sia scelta la base v_1, v_2):

A: $F(v_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

B: $\dim N(F) = 0$

C: $F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

D: $F(v_1 + v_2) = 4e_1 + 2e_2$

Nota bene: le frasi vere potrebbero essere anche più d'una.

Risposta: le frasi vere sono

Domanda 6. Sia V un K-spazio vettoriale e siano u, v, w degli elementi di V. Cosa il sottospazio vettoriale generato da u, v, w? Dare la definizione.

AAA Compitino di algebra lineare di martedì 12 febbraio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati e le lettere AAA. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 4 delle prime 5 domande e alla domanda 6.

Nome e cognome e matricola: ________________________________

Domanda 1. Sia $u = (1, 1, -1)$ e $v = (2, 1, 0)$ e sia θ l'angolo $u0v$, ovvero l'angolo compreso tra le due semirette che partono dall'origine e hanno direzione u e v rispettivamente. Calcolare $\cos\theta$.

Risposta: $\cos\theta =$

Domanda 2. Calcolare le soluzioni dell'equazione $z^2 = -3 - 4i$.

Risposta: Le soluzioni sono

Domanda 3. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det(A^3)$.

Risposta: $Det(A^3) =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare surgettiva e sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^7$ di dimensione 3. Sapendo che $\dim N(F) \cap U = 1$ determinare $\dim N(F) + U$.

Risposta: $\dim N(F) + U =$

Domanda 5. $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare. Sia v_1, v_2 una base di $\mathbb{R}^2$ diversa dalla base standard. Se

$$[F]^{v_1,v_2}_{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quali delle seguenti frasi sono sempre vere (ovvero vere comunque si sia scelta la base v_1, v_2):

A: $\dim N(F) = 0$

B: $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

C: $F(v_1 + v_2) = 3e_1 + 3e_2$

D: $F(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Nota bene: le frasi vere potrebbero essere anche più d'una.

Risposta: le frasi vere sono

Domanda 6. Sia V un K-spazio vettoriale e siano u, v, w degli elementi di V. Cosa il sottospazio vettoriale generato da u, v, w? Dare la definizione.

Compitino di algebra lineare di martedì 12 febbraio 2019: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 15 di tempo.

Esercizio 1. Siano u, v, w tre elementi di uno spazio vettoriale V e sia E un sottospazio vettoriale di V. Dimostrare che se $u, v, w \in E$ allora $Span(u, v, w) \subset E$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{C}^3$, sia U il sottospazio definito dall'equazione $x + y = 0$ e W il sottospazio definito dall'equazione $y + z = 0$. Sia $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ una applicazione lineare tale che

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x+2y+2z \\ -x+2y+2z & y \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U$$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & -z \\ -z & -x \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$$

Scrivere la matrice associata ad F rispetto alle basi standard di $\mathbb{C}^3$ e $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Sia U il sottospazio vettoriale di V dei polinomi $p(t)$ tali che $p(1) = p(2) = 0$. Sia W il sottospazio vettoriale di V generato da $t + 1, t^2 + 1, t^3 + 1, t^4 + 1$. Si calcoli la dimensione di $U \cap W$ e se ne dia una parametrizzazione.

Esercizio 4. Sia X il piano di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $z = 0$. Sia $u = (0, \cos\theta, \sin\theta)$ e sia Y il piano ortogonale a u passante per l'origine. Siano $P_X : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione su X e $P_Y : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione su Y. Sia

$$F = \frac{P_X + P_Y}{2}.$$

Studiare la diagonalizzabilit di F al variare dell'angolo θ.

1. Soluzioni compitino del 12 febbraio 2019: prima parte versione AAB

Domanda 1. $4/\sqrt{30}$.

Domanda 2. $\pm(2 + i)$

Domanda 3. -27

Domanda 4. 4

Domanda 5. B, C, D

Domanda 6. Il sottospazio vettoriale generato da u, v, w, detto $Spav(u, v, w)$ è definito nel modo seguente

$$Span(u, v, w) = \{au + bv + cw \; : \; a, b, c \in K\}$$

2. Soluzioni compitino del 12 febbraio 2019: prima parte versione ABA

Domanda 1. $1/\sqrt{15}$.

Domanda 2. $\pm(2 - i)$

Domanda 3. 8

Domanda 4. 5

Domanda 5. A, B, C

Domanda 6. Il sottospazio vettoriale generato da u, v, w, detto $Spav(u, v, w)$ è definito nel modo seguente

$$Span(u, v, w) = \{au + bv + cw \; : \; a, b, c \in K\}$$

3. Soluzioni compitino del 12 febbraio 2019: prima parte versione BAA

Domanda 1. $1/\sqrt{30}$.

Domanda 2. $\pm(1 + 2i)$

Domanda 3. -8

Domanda 4. 3

Domanda 5. A, B, D

Domanda 6. Il sottospazio vettoriale generato da u, v, w, detto $Spav(u, v, w)$ è definito nel modo seguente

$$Span(u, v, w) = \{au + bv + cw \, : \, a, b, c \in K\}$$

4. Soluzioni compitino del 12 febbraio 2019: prima parte versione AAA

Domanda 1. $3/\sqrt{15}$.

Domanda 2. $\pm(1 - 2i)$

Domanda 3. 27

Domanda 4. 6

Domanda 5. A, C, D

Domanda 6. Il sottospazio vettoriale generato da u, v, w, detto $Spav(u, v, w)$ è definito nel modo seguente

$$Span(u, v, w) = \{au + bv + cw \, : \, a, b, c \in K\}$$

Soluzioni compitino del 12 febbraio 2019: seconda parte

Soluzione esercizio 1. Sia x un elemento di $Span(u, v, w)$ allora esistono tre scalari $a, b, c \in K$ tali che $x = a\,u + b\,v + c\,w$. Poiché E è un sottospazio vettoriale è chiuso per moltiplicazione per scalare, quindi da $u, v, w \in E$ ricaviamo $au, bv, cw \in E$. Inoltre essendo chiuso anche per somma ricaviamo che $x = au + bv + cw \in E$.

Soluzione esercizio 2. Osserviamo che $e_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$ sono una base di W e che $e_3 = (0, 0, 1)$ è un elemento di U ma non di W. In particolare e_1, v_2, e_3 è una base di $\mathbb{C}^3$. Calcoliamo la matrice associata ad F rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo. Abbiamo

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad F(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$[F]^{e_1,v_2,e_3}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare la matrice associata ad F rispetto alle basi standard in arrivo e in partenza effettuo il cambiamento di base. Abbiamo

$$[Id]^{e_1,v_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{quindi la sua inversa è } [Id]^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,v_2,e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e otteniamo

$$[F]^{e_1,e_2,e_3}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 3. I polinomi $g_1 = t+1, g_2 = t^2+1, g_3 = t^3+1, g_4 = t^4+1$ sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di W. In particolare W ha dimensione 4. Sia $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$F\big(p(t)\big) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}.$$

Per definizione di U abbiamo che $U \cap W = N(F)$. Calcoliamo la matrice associata ad F rispetto alla base g_i in partenza e standard in arrivo. Abbiamo

$$[F]^g_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

Se riduciamo la matrice a scalini otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

In particolare il nucleo ha dimensione due e una sua parametrizzazione si può ottenere scegliendo le variabili corrispondenti alla terza e quarta colonna come variabili libere. Ovvero, ricordandoci che stiamo usando la base g_i in partenza, otteniamo la seguente parametrizzazione del nucleo di F e quindi dell'intersezione $U \cap W$:

$$G(x, y) = (2x + 6y)g_1 + (-3x - 7y)g_2 + xg_3 + yg_4 = yt^4 + xt^3 + (-3x - 7y)t^2 + (2x + 6y)t$$

Soluzione esercizio 4. Ricordiamo che le due proiezioni P_X e P_Y sono date dalle applicazioni

$$P_X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_Y(v) = v - \frac{v \cdot u}{\|u\|} u$$

quindi la matrice associata ad F rispetto alla base standard uguale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+s^2)/2 & -sc/2 \\ 0 & -sc/2 & c^2/2 \end{pmatrix}$$

dove ho posto $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$. Calcolando il polinomio caratteristico otteniamo

$$(1-t)(t^2 - t + \frac{c^2}{4})$$

le cui radici sono $1, \frac{1+\sin\theta}{2}, \frac{1-\sin\theta}{2}$. Per $\sin\theta \neq 0, \pm 1$ ottengo tre radici distinte quindi l'applicazione è diagonalizzabile.

Nei rimanenti casi scriviamo esplicitamente la matrice che otteniamo. Se $\sin\theta = \pm 1$ allora $\cos\theta = 0$ e la matrice che otteniamo è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è diagonale. Se $\sin\theta = 0$ allora $\cos\theta = \pm 1$ e la matrice che otteniamo è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

che è diagonale.

NOTA: nel secondo semestre farete un teorema che garantisce che una classe molto ampia di applicazioni lineari, di cui una F come nell'esercizio è un esempio molto particolare, sempre diagonalizzabile.