Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 24 giugno 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 45 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 5 domande.

Domanda 1. Considera $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0\}$. Sia $f\colon \mathbb{R}^7 \to W$ una applicazione lineare surgettiva. Qual è la dimensione di $\ker f$?

Risposta: $\ker f$ ha dimensione

Domanda 2. Considera i sottospazi $U, W \subset \mathbb{R}^3$ ed il vettore $v \in \mathbb{R}^3$ seguenti:

$$U = \{7x - 5y + 4z = 0\}, \quad W = Span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, il vettore v si scrive in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Determina u.

Risposta: $u =$

Domanda 3. Scrivi una base di autovettori per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Risposta:

Domanda 4. Sia A una matrice quadrata 2×2 non nulla tale che A^2 sia la matrice nulla. Determina il rango di A.

Risposta: Il rango di A è

Domanda 5. Sia $f(x) = Ax + b$ la riflessione in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla retta $x + y = 1$. Determina A e b.

Risposta: $A =$ $\qquad$ $b =$

Domanda 6. Determina la distanza fra le rette r e s seguenti:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -t \\ 1+t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}, \quad s = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ 1 \\ 2+2s \end{pmatrix} \middle| \ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Risposta: La distanza è

Risposte

Risposta 1. 4.

Risposta 2. $\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Risposta 3. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, oppure una qualsiasi terna di vettori multipli di questi.

Risposta 4. 1.

Risposta 5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Risposta 6. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Compito di Geometria e algebra lineare del 24 giugno 2019

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 30'.

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una isometria vettoriale (rispetto al prodotto scalare euclideo). Dimostra che f è una rotazione o una antirotazione.

Esercizio 2. Considera $\mathbb{R}^4$ con variabili w, x, y, z. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio

$$U = \{w - x + y = 0, \quad x - z = 0\}.$$

(1) Costruisci un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.
(2) Costruisci una matrice reale A di taglia 4×4 tale che l'endomorfismo $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ soddisfi queste proprietà:
  (a) U è L_A-invariante,
  (b) A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e neppure su $\mathbb{C}$,
  (c) L_A è suriettivo.

Esercizio 3. Considera in $\mathbb{R}^3$ i piani affini

$$\pi = \{z = 1\}, \quad \pi' = \{x = y\}$$

Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ senza punti fissi tale che $f(\pi) = \pi'$ e $f(\pi') = \pi$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ lo spazio formato dai polinomi di grado al massimo 2. Considera il prodotto scalare g su V dato da

$$g(p, q) = p(0)q(0) + p'(1)q'(1) - p(-1)q(-1).$$

(1) Calcola la segnatura di g.
(2) Determina due polinomi $p(x)$, $q(x)$ indipendenti tali che la restrizione di g al piano generato da p e q sia degenere.

1. Soluzioni

Esercizio 1. Fatto a lezione.

Esercizio 2. Si prende come base di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I primi due vettori sono una base di U, quindi gli ultimi due generano un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$. In questa base, si può prendere l'endomorfismo con matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nella base canonica diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa non è l'unica soluzione possibile.

Esercizio 3. I due piani si intersecano in una retta r e sono ortogonali. Quindi basta fare una rototraslazione lungo r di angolo $\frac{\pi}{2}$ e di un certo passo $a \neq 0$, ad esempio $a = 1$. Facendo i conti troviamo

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Non è l'unica soluzione, ad esempio si può ruotare di $\frac{3\pi}{2}$.

Esercizio 4. La matrice associata rispetto alla base canonica $1, x, x^2$ è

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3/2 \\ -1 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Usando Jacobi dal basso si trova la sequenza $1, 3, -1, -6$. Quindi la segnatura è $(2, 1, 0)$. Per il secondo punto è sufficiente prendere un $p(x)$ isotropo ed un $q(x)$ ortogonale a $p(x)$. Ad esempio

$$p(x) = 1, \quad q(x) = x + x^2.$$