Compito di geometria e algebra lineare di lunedì 27 gennaio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Si è ammessi alla seconda parte se si risponde correttamente almeno a 4 domande. Si è ammessi con 6 se si risponde correttamente a tutte e 6 le domande, con 3 se si risponde correttamente a 5 e con 0 se si risponde correttamente a 4 domande. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Sia $z = \log_e \sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}$, calcolare e^z.

$e^z =$

Domanda 2. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$ e sia $f_1 = 1$, $f_2 = 1 + t^2$, $f_3 = t - t^2$ una base di V. Sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione $F(p(t)) = p(t+1)$. Si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base f_1, f_2, f_3 in partenza e alla base canonica in arrivo.

$[F]^{f_1,f_2,f_3}_{1,t,t^2} =$

Domanda 3. Sia $V = \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e sia W il sottospazio di V delle matrici simmetriche. Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare suriettiva. Si calcoli la dimensione del nucleo di T.

$\dim N(T) =$

Domanda 4. Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_5 \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) se $\dim V = 5$ e $v_1, \dots, v_5$ sono generatori allora sono anche linearmente indipendenti;
B) se $v_1, \dots, v_5$ sono linearmente indipendenti allora $v_1 + \cdots + v_5 \neq 0$.

Le frasi vere sono:

Domanda 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'isometria lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $\det T = 1$ allora T è una rotazione intorno ad un asse.
B) Se $\det T = -1$ allora T è una riflessione rispetto ad un piano passante per l'origine.
C) Se $\det T = 1$ allora T è diagonalizzabile.

Le frasi vere sono:

Domanda 6. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione $\mathbb{R}$-lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $p_T(t) = -t^3$ allora $\dim N(T) \neq 0$.
B) Se $p_T(t) = -t^3 - t$ allora T è diagonalizzabile; .

Le frasi vere sono:

Compito di geometria e algebra lineare di lunedì 27 gennaio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Si è ammessi alla seconda parte se si risponde correttamente almeno a 4 domande. Si è ammessi con 6 se si risponde correttamente a tutte e 6 le domande, con 3 se si risponde correttamente a 5 e con 0 se si risponde correttamente a 4 domande. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________

Domanda 1. Sia $z = \log_e \sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$, calcolare e^z.

$e^z =$

Domanda 2. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$ e sia $f_1 = 1,\ f_2 = 2 + t^2,\ f_3 = t + t^2$ una base di V. Sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione $F(p(t)) = p(t+1)$. Si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base f_1, f_2, f_3 in partenza e alla base standard in arrivo.

$[F]^{f_1,f_2,f_3}_{1,t,t^2} =$

Domanda 3. Sia $V = \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e sia W il sottospazio di V delle matrici simmetriche. Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare suriettiva. Si calcoli la dimensione del nucleo di T.

$\dim N(T) =$

Domanda 4. Sia V uno spazio vettoriale siano $v_1, \dots, v_4 \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) se $v_1, \dots, v_4$ sono linearmente indipendenti allora $v_1 + \cdots + v_4 \neq 0$.
B) se $\dim V = 4$ e se $v_1, \dots, v_4$ sono generatori allora sono linearmente indipendenti.

Le frasi vere sono:

Domanda 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'isometria lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $\det T = -1$ allora T è una riflessione rispetto ad un piano passante per l'origine.
B) Se $\det T = 1$ allora T è diagonalizzabile.
C) Se $\det T = 1$ allora T è una rotazione intorno ad un asse.

Le frasi vere sono:

Domanda 6. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione $\mathbb{R}$-lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $p_T(t) = -t^3 - t$ allora T è diagonalizzabile; .
B) Se $p_T(t) = -t^3$ allora $\dim N(T) \neq 0$.

Le frasi vere sono:

Compito di geometria e algebra lineare di lunedì 27 gennaio 2020: prima parte

Istruzioni: Avete 55 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Si è ammessi alla seconda parte se si risponde correttamente almeno a 4 domande. Si è ammessi con 6 se si risponde correttamente a tutte e 6 le domande, con 3 se si risponde correttamente a 5 e con 0 se si risponde correttamente a 4 domande. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = \log_e \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$, calcolare e^z.

$e^z =$

Domanda 2. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$ e sia $f_1 = 1$, $f_2 = 2 + t^2$, $f_3 = 2t + t^2$ una base di V. Sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione $F(p(t)) = p(t-1)$. Si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base f_1, f_2, f_3 in partenza e alla base standard in arrivo.

$[F]^{f_1,f_2,f_3}_{1,t,t^2} =$

Domanda 3. Sia $V = \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e sia W il sottospazio di V delle matrici simmetriche. Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare suriettiva. Si calcoli la dimensione del nucleo di T.

$\dim N(T) =$

Domanda 4. Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_6 \in V$. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) se $v_1, \dots, v_6$ sono linearmente indipendenti allora $v_1 + \cdots + v_6 \neq 0$.
B) se $\dim V = 6$ e se $v_1, \dots, v_6$ sono generatori allora sono linearmente indipendenti.

Le frasi vere sono:

Domanda 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'isometria lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $\det T = 1$ allora T è diagonalizzabile.
B) Se $\det T = 1$ allora T è una rotazione.
C) Se $\det T = -1$ allora T è una riflessione rispetto ad un piano passante per l'origine.

Le frasi vere sono:

Domanda 6. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione $\mathbb{R}$-lineare. Dire quali delle seguenti frasi sono vere (potrebbero essere anche tutte vere o tutte false):

A) Se $p_T(t) = -t^3$ allora $\dim N(T) \neq 0$.
B) Se $p_T(t) = -t^3 - t$ allora T è diagonalizzabile; .

Le frasi vere sono:

Compito del 7 gennaio 2020: seconda parte

Avete 2 ore e 5 minuti di tempo a disposizione. Motivate le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Sia g un prodotto scalare su V e $F : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare.

a) Cosa vuol dire che F è autoaggiunta rispetto a g? Dare la definizione.
b) Sia W un sottospazio di V tale che $F(W) \subset W$ e sia F autoaggiunta. Dimostrare che $F(W^\perp) \subset W^\perp$.

Esercizio 2. Siano A e B le matrici seguenti.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare la dimensione di $Im(L_A) + N(L_B)$.

Esercizio 3. Siano r e s due rette di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine che formano un angolo di $\pi/6$. Siano R ed S le rotazioni rispettivamente attorno ad r e attorno ad s di π.

a) Si dimostri che $R \circ S$ è una rotazione e se ne determini l'asse;
b) Si calcoli l'angolo di rotazione.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ e sia $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare:

$$b(f, g) = f(0)g(0) - 2f(1)g(1) + f(2)g(-1) + f(-1)g(2).$$

Calcolarne la segnatura.

Soluzioni del compito del 27 gennaio: prima parte, I versione

Domanda 1. $e^z = -1 + i$

Domanda 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Domanda 3. $\dim N(T) = 3$

Domanda 4. A,B

Domanda 5. A

Domanda 6. A

Soluzioni del compito del 27 gennaio: prima parte, II versione

Domanda 1. $e^z = 1 - i$

Domanda 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Domanda 3. $\dim N(T) = 3$

Domanda 4. A,B

Domanda 5. C

Domanda 6. B

Soluzioni del compito del 27 gennaio: prima parte, III versione

Domanda 1. $e^z = 1 + i$

Domanda 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Domanda 3. $\dim N(T) = 3$

Domanda 4. A,B

Domanda 5. B

Domanda 6. A

Soluzioni del compito del 27 gennaio: seconda parte

Esercizio 1. a) F è autoaggiunta se e solo se per ogni $u, v \in V$ vale

$$\langle F(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle.$$

b) Sia $u \in W^\perp$. Per dimostrare che $F(u) \in W^\perp$ verifico che $\langle F(u), w \rangle = 0$ per ogni $w \in W$. Infatti

$$\langle F(u), w \rangle = \langle u, F(w) \rangle = 0.$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che $u \in W^\perp$ e $F(W) \subset W$.

Esercizio 2. Riducendo a scalini le matrici A e B otteniamo
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} .$$
Quindi A e B hanno rango 3, $\dim Im(L_A) = 3$ e le prime tre colonne v_1, v_2, v_3 della matrice A sono una base di $Im(L_A)$ e $\dim N(L_B) = 2$. Se $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$ è un elemento di $Im(L_A)$ allora $v \in N(L_B)$ se e solo se
$$xL_B(v_1) + yL_B(v_2) + zL_B(v_3) = L_B(v) = 0 ,$$
ovvero se
$$\begin{cases} 36x - 11y - 25z = 0; \\ 6\,x - 6\,y = 0; \\ 2\,x + y - 3\,z = 0. \end{cases}$$
Questo sistema ha rango 2. Ne deduciamo che le soluzioni del sistema hanno dimensione 1 ovvero che l'intersezione tra $Im(L_A)$ e $N(L_B)$ ha dimensione 1. Dalla formula di Grassmann ricaviamo che $Im(L_A) + N(L_B)$ ha dimensione 4.

Esercizio 3. R e S sono due applicazioni lineari di determinante uno, quindi anche la loro composizione lo è, in particolare $R \circ S$ è una isometria lineare di $\mathbb{R}^3$ di determinante 1 e quindi una rotazione. Osserviamo che se u è un vettore ortogonale sia a r che a s abbiamo $R(u) = S(u) = -u$ e quindi $R \circ S(u) = u$. Quindi l'asse di rotazione è la retta ℓ ortogonale sia a r che a s passante per l'origine. Per determinare l'angolo di rotazione studiamo la restrizione di $R \circ S$ al piano W ortogonale a ℓ ovvero al piano generato da r e da s. La restrizione di R a questo piano è una riflessione rispetto alla retta r e la restrizione di S a questo piano è una riflessione rispetto alla retta s. La composizione di due riflessioni di questo tipo è una rotazione di angolo il doppio dell'angolo tra le due rette ovvero, nel nostro caso, di angolo $\pi/3$. Questa è una affermazione che abbiamo già visto a lezione, si può verificare geometricamente oppure moltiplicando le due matrici di riflessione in questione.

Alternativamente si poteva scegliere una base ortonormale u_1, u_2, u_3 tale che u_1 è una base di s e u_1, u_2 è una base del piano W generato da r e s e possiamo anche assumere (cambiando il segno di u_1, u_2) che r sia generato da $(\sqrt{3}u_1 + u_2)/2$. In questa base abbiamo
$$[R]_{\underline{u}}^{\underline{u}} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad [S]_{\underline{u}}^{\underline{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
e la loro composizione è
$$[R \circ S]_{\underline{u}}^{\underline{u}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
è quindi una rotazione di angolo $\pi/3$ attorno all'asse $\mathbb{R}u_3$ ovvero alla retta ortogonale a r e a s.

Esercizio 4. Consideriamo la base f_0, f_1, f_2, f_{-1} di V in cui f_0 è il polinomio che si annulla in 1, 2 e -1 e vale 1 in 0, e similmente sono definiti gli altri polinomi. Per esempio $f_0 = (t-1)(t-2)(t+1)/2$ e $f_1 = -t(t-2)(t+1)/2$. Rispetto a questa base la matrice associata a b è
$$[b]_{f_0,f_1,f_2,f_{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Il polinomio caratteristico di questa matrice è $(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda^2 - 1)$ e quindi la segnatura è $(2, 2, 0)$.

Alternativamente si può scrivere la matrice associata rispetto alla base canonica e usare il criterio di Jacobi. C'è un determinante 4×4 da calcolare, ma è fattibile.