Compito di Geometria e algebra lineare del 15 luglio 2019

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 30'.

Esercizio 1.

(1) Sia g un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Definisci cosa vuol dire che g è definito positivo.
(2) Se S è una matrice simmetrica reale $n \times n$, diciamo come sempre che S è *definita positiva* se $g_S(x, y) = {}^t x S y$ è un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$. Mostra che se S e S' sono due matrici $n \times n$ definite positive allora anche $S+S'$ è una matrice definita positiva.

Esercizio 2. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Determina la forma di Jordan di A.
(2) Determina la forma di Jordan di A^3.

Esercizio 3. Considera le rette in $\mathbb{R}^3$

$$r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Scrivi in forma parametrica la retta s che è ortogonale ad entrambe r_1 e r_2.
(2) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r_1) = r_2$.
(3) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r_1) = r_2$ e $f(r_2) = r_1$.

Esercizio 4. Considera la conica dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$C_t = \{x^2 + (1-t)y^2 + 2tx - 2(1-t)y + 2 - t = 0\}.$$

(1) Determina il tipo di conica per ogni $t \in \mathbb{R}$.
(2) Determina i centri della conica per ogni $t \in \mathbb{R}$.

1. Soluzioni

Esercizio 1.

(1) $g(v, v) > 0$ per ogni $v \neq 0$.
(2) Vale

$$ {}^t x(S + S')x = {}^t xSx + {}^t xS'x > 0$$

per ogni $x \neq 0$, perché ${}^t xSx > 0$ e ${}^t xS'x > 0$.

Esercizio 2. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (\lambda - 2)^4$. Troviamo

$$\dim \ker(A - 2I) = 2, \quad \dim \ker(A - 2I)^2 = 1.$$

Quindi l'unica forma di Jordan possibile è questa:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La forma di Jordan di A^3 è la stessa di quella di J^3 perché A e J sono matrici simili e quindi lo sono anche A^3 e J^3. Facendo i conti a blocchi troviamo che

$$J^3 = \begin{pmatrix} 8 & a & b & 0 \\ 0 & 8 & c & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

per qualche $a, b, c > 0$. Questa matrice ha $p(\lambda) = (\lambda - 8)^4$, $\dim\ker(J^3 - 8I) = 2, \dim\ker(J^3 - 8I)^2 = 1$ e quindi come sopra concludiamo che la sua matrice di Jordan è

$$J^3 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Le due rette si disegnano abbastanza facilmente.

(1) Le rette sonno entrambe orizzontali, quindi s è verticale e si trova

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) Ad esempio, una rototraslazione lungo s di passo 2 e angolo $\frac{\pi}{2}$ funziona. Troviamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Una rotazione di π (cioè una riflessione) intorno all'asse

$$s' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

funziona. Troviamo quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Otteniamo

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1-t & t-1 \\ t & t-1 & 2-t \end{pmatrix}.$$

Con il criterio di Jacobi troviamo

$$1, \ 1, \ \det A = 1 - t, \ \det \bar{A} = (t-1)^2(t+1).$$

Quindi:

- per $t \in (-1, 1)$ la matrice $\bar{A}$ è definita e quindi $C_t = \emptyset$,
- per $t < -1$ e $t > 1$ si ottiene rispettivamente una ellisse e una iperbole,
- per $t = \pm 1$ la conica è degenere. Si ottengono

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 3 = 0, \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

che possono essere riscritte come

$$(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 0, \quad (x+1)^2 = 0.$$

La prima è il punto $(1, 1)$, la seconda è la retta $x = -1$ doppia.

Per $t \notin [-1, 1)$, la conica ha centro $(-t, 1)$. Per $t = 1$ tutti i punti della retta $x = -1$ sono un centro.