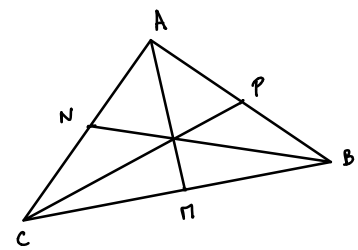
APPLICAZIONI A PROBLEMI DI GEOMETRIA DEL PIANO

Dimostreremo ora alcuni teoremi di geometria che probabilmente molti di voi hanno già visto alle superiori, utilizzando le proprietà della somma, del prodotto per scalare e del prodotto scalare. Più degli enunciati stessi utilizzeremo questi risultati come esempio di come si possano utilizzare

<u>Esempio 1</u> Sia ABC un triangolo non degenere e sia M il punto medio di BC, N di AC e P di AB. Allora i segmenti AM, BN, CP passano per il baricentro.



<u>dim</u>

Ricordiamo che il baricentro è

$$\frac{A+B+C}{3} = R$$

quindi voglio mostrare che $R = A + t\,\overrightarrow{AM}$ con $t \in [0,1]$. Sostituendo $M = \frac{B+C}{2}$ e $\overrightarrow{AM} = M - A$ ottengo

$$A + t\,\frac{B+C-2A}{2} = \frac{A+B+C}{3}$$

ovvero

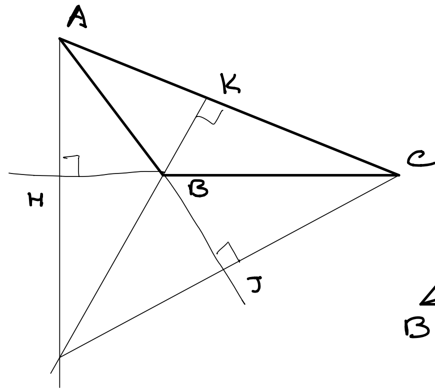
$$t\,\frac{B+C-2A}{2} = \frac{B+C-2A}{3}$$

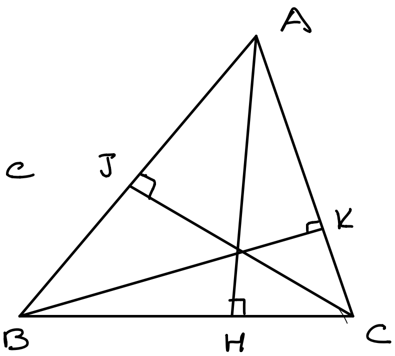
per $t = \frac{2}{3}$ si ottiene l'uguaglianza desiderata.

Similmente per il segmento BN e CP.

#

Esempio 2 Sia ABC un triangolo non degenere. Allora le rette contenenti le altezze passano per uno stesso punto





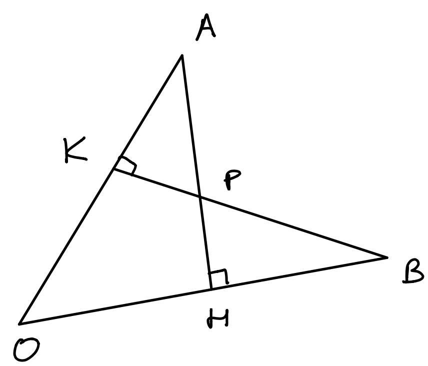
Nella figura il caso di un triangolo ottusangolo e il caso di un triangolo acutangolo.

dim.

Traslando possiamo supporre che $C = \underline{0}$ sia l'origine.

Osserviamo che l'altezza per A e quella per B non sono rette parallele perché BC e AC non sono parallele. Allora AH e BK si incontrano in un punto P.

Dimostro che la retta per O e per P è ortogonale ad AB.



Traduciamo queste condizioni di ortogonalità in condizioni più algebriche

la retta AH ortogonale ad OB è come dire la retta AP ortogonale ad OB ovvero

$$\vec{AP} \cdot \vec{OB} = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$(P-A) \cdot B = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$P \cdot B = A \cdot B$$

Similmente BK ortogonale a OA è come dire

$$P \cdot A = A \cdot B$$

da queste due uguaglianze ottengo

$$P \cdot B = P \cdot A$$

ovvero $$P \cdot (B - A) = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$$

che è come dire OP ortogonale ad AB #

__Esempio 3__

Sia ABC un triangolo non degenere

Sia X il baricentro

Y l'ortocentro (l'intersezione delle altezze)

Z il circocentro (ovvero il centro del cerchio circoscritto al triangolo.

Allora X, Y, Z sono allineati.

<u>dim</u> Sappiamo che

- $X = \dfrac{A+B+C}{3}$

- Y è caratterizzato da

$$\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \overrightarrow{BY} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \qquad \overrightarrow{CY} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

ovvero

$$A \cdot \overrightarrow{BC} = Y \cdot \overrightarrow{BC} \qquad B \cdot \overrightarrow{AC} = Y \cdot \overrightarrow{AC} \qquad C \cdot \overrightarrow{AB} = Y \cdot \overrightarrow{AB}$$

- Z è caratterizzato da

$$\|A - Z\| = \|B - Z\| = \|C - Z\|$$

mostriamo che sulla retta XY c'è un punto che ha le proprietà che caratterizzano Z.
Sia $P = Y + t\,\overrightarrow{YX}$ e imponiamo le condizioni

$$\|A - P\| = \|B - P\| = \|C - P\|$$

imponiamo prima $\|A - P\| = \|B - P\|$ che riscriviamo come $\|A-P\|^2 = \|B-P\|^2$. Utilizzando il $\|u\|^2 = u \cdot u$ e la bilinearità del prodotto scalare otteniamo:

$$\|A\|^2 + \|P\|^2 - 2\,A \cdot P = \|B\|^2 + \|P\|^2 - 2\,B \cdot P$$

ovvero

$$\|B\|^2 - \|A\|^2 = 2\,P \cdot \overrightarrow{AB}$$

sostituendo $P = Y + t\,\overrightarrow{YX} = tX + (1-t)Y$ e usando $Y \cdot \overrightarrow{AB} = C \cdot \overrightarrow{AB}$

e $X = (A+B+C)/3$ ottengo

$$\|B\|^2 - \|A\|^2 = 2t\,\frac{A+B+C}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + 2(1-t)\,C \cdot \overrightarrow{AB}$$

e svolgendo i conti

$$\|B\|^2 - \|A\|^2 - 2\,C \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \cdot t \left(\|B\|^2 - \|A\|^2 - 2\,C \cdot \overrightarrow{AB} \right)$$

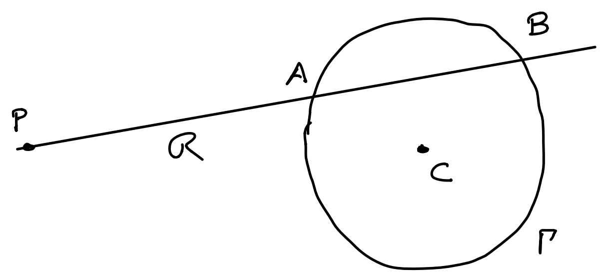
quindi prendendo $t = \frac{3}{2}$ l'uguaglianza è verificata.
Lo stesso identico conto mostra che per $t = \frac{3}{2}$ abbiamo anche $\|B-P\| = \|C-P\|$ e quindi

$$Z = Y + \frac{3}{2}\overrightarrow{XY}$$

#

<u>Esempio 4</u>

Sia P un punto esterno ad una circonferenza Γ di raggio R e sia d la distanza di P dal centro della circonferenza. Se tracciamo una retta $\mathcal{R}$ passante per P e che interseca Γ e indichiamo con A e B le intersezioni di $\mathcal{R}$ e Γ allora



$$\mathrm{dist}(P,A)\cdot \mathrm{dist}(P,B) = d^2 - R^2$$

(L'affermazione è vera anche nel caso $\mathcal{R}$ tangente nel qual caso nella formula si prende $A = B$)

<u>dim</u> Sia C il centro del cerchio
Traslando la figura possiamo supporre che $P = O$.
Quindi $B = \lambda A$. Abbiamo

$$\|A - C\|^2 = R^2 \quad e \quad \|B - C\|^2 = R^2$$

perché A e B sono punti di Γ. Dalla prima equazione usando $\|C\|^2 = d^2$ ottengo

$$\|A\|^2 - 2\, A\cdot C + d^2 - R^2 = 0$$

e dalla seconda

$$\lambda^2 \|A\|^2 - 2\lambda\, A \cdot C + d^2 - R^2 = 0$$

quindi l'equazione

$$t^2 \|A\|^2 - 2t\, A \cdot C + d^2 - R^2 = 0$$

ha come radici $t_1 = 1$ e $t_2 = \lambda$.

in particolare $\quad t_1 \cdot t_2 = \dfrac{d^2 - R^2}{\|A\|^2}\quad$ ovvero

$$\lambda = \frac{d^2 - R^2}{\|A\|^2}$$

quindi

$$\mathrm{dist}(P, A) \cdot \mathrm{dist}(P, B) = \|A\| \cdot \|\lambda A\| =$$

$$= \lambda \|A\|^2 = d^2 - R^2$$

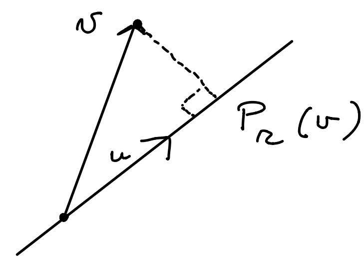
#

Proiezioni ortogonali

Vogliamo trovare un modo di descrivere la proiezione ortogonale di un punto su una retta o su un piano.

Consideriamo la retta

$$r = \mathbb{R}u + q.$$



con $q, u \in \mathbb{R}^3$ e $u \neq 0$.

Se $v \in \mathbb{R}^3$ indichiamo con

$$P_r(v)$$

la proiezione ortogonale di v su r. Vogliamo calcolare $P_r(v)$.

Facciamo prima il caso $q = 0$.

Il punto $w = P_r(u)$ è caratterizzato da due proprietà

1) $w \in r$

2) il segmento che unisce v a w è ortogonale a u

traduciamo matematicamente queste proprietà:

1) $w = tu$ con $t \in \mathbb{R}$

2) $(v - w) \cdot u = 0$

sostituendo 1) in 2) trovo $(v - tu) \cdot u = 0$

ovvero $v \cdot u = t \, \|u\|^2$ da cui $t = \dfrac{v \cdot u}{\|u\|^2}$

Quindi $P_r(v) = \dfrac{v \cdot u}{\|u\|^2} \, u$

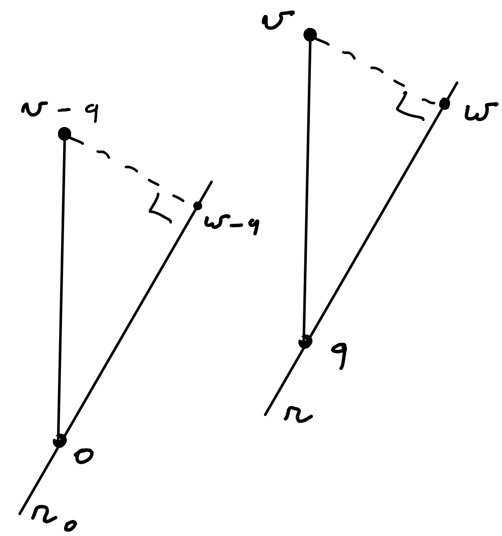
Se $q \neq 0$ si può procedere analogamente ottenendo delle equazioni solo leggermente più complicate. Alternativamente possiamo traslare tutto di $-q$.

Allora

r si trasforma in $r_0 = \mathbb{R}u$

q si trasforma nell'origine

il triangolo rettangolo $v\,w\,q$, nel triangolo rettangolo $0, w-q, v-q$.



In particolare $w-q$ è la proiezione ortogonale di $v-q$ su r_0. Quindi

$$w - q = \frac{(v-q)\cdot u}{\|u\|^2}\, u$$

ovvero

$$P_r(v) = w = \frac{(v-q)\cdot u}{\|u\|^2}\, u + q$$

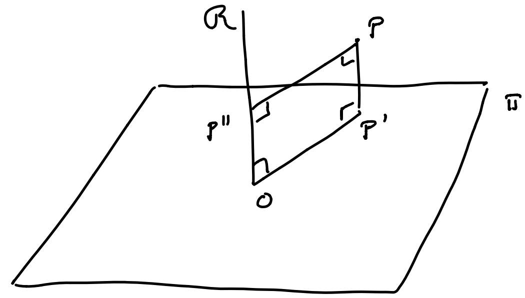
<u>Esercizio</u> Dare una dimostrazione della formula appena trovata

Consideriamo adesso il caso della proiezione ortogonale su un piano. Come nel caso della retta facciamo prima il caso di un piano passante per l'origine nel quale le notazioni sono un po' più leggere

Sia u un vettore diverso da zero e sia

$$\Pi = \{ v \in \mathbb{R}^3 : \quad v \cdot u = 0 \}$$

il piano ortogonale alla retta $\mathcal{R} = \mathbb{R}u$.



Sia $P \in \mathbb{R}^3$. Sia P' la sua proiezione su Π e P'' la sua proiezione su $\mathcal{R}$.

Il quadrilatero $O\,P'\,P\,P''$ è un rettangolo infatti:

la retta PP' è parallela a $\mathcal{R}$ e quindi $O\,P'\,P\,P''$ sono su uno stesso piano

$\mathcal{R}$ è ortogonale a Π e quindi $P''OP'$ è retto

PP' è ortogonale a Π e quindi $OP'P$ è retto

PP'' è ortogonale a $\mathcal{R}$ e quindi $PP''O$ è retto

PP' è parallelo a $\mathcal{R}$ e quindi anche $P'PP''$ è retto

allora $\quad P' + P'' = P$

ora $\quad P' = \pi_{\mathcal{R}}(P) = \dfrac{P \cdot u}{\|u\|^2}\, u$

quindi

$$P'' = P - P' = P - \frac{P \cdot u}{\|u\|^2}\, u$$

<u>Esercizio</u> Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 3)$ sul piano $x + y + z = 1$

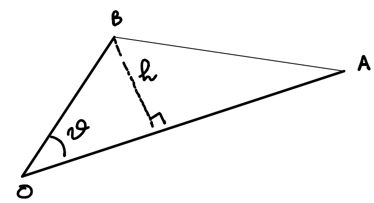
L'AREA DI UN TRIANGOLO E IL PRODOTTO VETTORIALE

Vogliamo ora descrivere una formula per l'area del triangolo OAB con $A=(a_1\ a_2\ a_3)$ e $B=(b_1\ b_2\ b_3)$

PROPOSIZIONE Il triangolo OAB ha area uguale a

$$\frac{1}{2}\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

dim Sia S l'area cercata.



Abbiamo

$$S=\frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(O,A)\cdot h$$

dove h è l'altezza del triangolo relativa alla base OA.
Abbiamo

$$\mathrm{dist}(O,A)=\|A\| \quad e \quad h=\mathrm{dist}(O,B)\sin\vartheta=\|B\|\sin\vartheta$$

dove ϑ è l'angolo AOB. ϑ è un angolo compreso tra $0°$ e $180°$ quindi $\sin\vartheta\geq 0$ da cui

$$\sin\vartheta=\sqrt{1-(\cos\vartheta)^2}$$

Infine possiamo calcolare $\cos\vartheta$ usando il prodotto scalare e otteniamo

$$\cos\vartheta=\frac{A\cdot B}{\|A\|\,\|B\|} \quad \text{e quindi} \quad \sin\vartheta=\sqrt{1-\left(\frac{A\cdot B}{\|A\|\,\|B\|}\right)^2}$$

Mettendo tutti i pezzi insieme otteniamo

$$S=\frac{1}{2}\|A\|\,\|B\|\sqrt{1-\left(\frac{A\cdot B}{\|A\|\,\|B\|}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\|A\|^2\,\|B\|^2-(A\cdot B)^2}$$

Sviluppiamo ora l'espressione all'interno

$$\|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

$$= \cancel{a_1^2 b_1^2} + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + \cancel{a_2^2 b_2^2} + a_2^2 b_3^2 +$$
$$a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + \cancel{a_3^2 b_3^2} - \cancel{a_1^2 b_1^2} - \cancel{a_2^2 b_2^2} - \cancel{a_3^2 b_3^2}$$
$$- 2 a_1 a_2 b_1 b_2 - 2 a_1 a_3 b_1 b_3 - 2 a_2 a_3 b_2 b_3$$

$$= a_2^2 b_3^2 - 2 a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2$$
$$+ a_3^2 b_1^2 - 2 a_3 b_1 a_1 b_3 + a_1^2 b_3^2$$
$$+ a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

e quindi otteniamo la formula cercata #

DEFINIZIONE (PRODOTTO VETTORIALE)

Dati $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ e $B = (b_1\ b_2\ b_3)$ definisco il prodotto vettoriale tra A e B come il vettore

$$A \wedge B = (a_2 b_3 - a_3 b_2\ ,\ a_3 b_1 - a_1 b_3\ ,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

OSSERVAZIONE Se S è la superficie del triangolo OAB, e ϑ è l'angolo AOB nella dimostrazione della proposizione precedente abbiamo visto

$$2S = \|A\| \|B\| \sin \vartheta = \|A \wedge B\|$$

Esempio

Se $e_1 = (1, 0, 0)$ $e_2 = (0, 1, 0)$ $e_3 = (0, 0, 1)$

abbiamo

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1 \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

<u>OSSERVAZIONE</u> (PROPRIETÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE)

Se $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

1) $A \wedge B = - B \wedge A$

2) $(A \wedge B) \cdot A = 0 \qquad (A \wedge B) \cdot B$

ovvero $A \wedge B$ è ortogonale ad A e a B

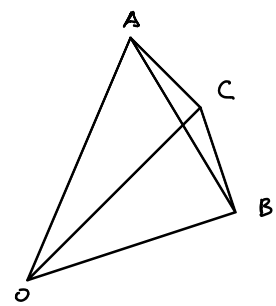
3) $A \wedge (B + C) = A \wedge B + A \wedge C$

$(A + B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$

4) $\lambda A \wedge B = A \wedge \lambda B = \lambda (A \wedge B)$

<u>Esercizio</u> Dimostrare tutte queste proprietà

VOLUME DI UN TETRAEDRO



Sia $A = (a_1 \ a_2 \ a_3)$ $B = (b_1 \ b_2 \ b_3)$ e $C = (c_1 \ c_2 \ c_3)$ vogliamo trovare una formula semplice per il volume V del tetraedro $OABC$.

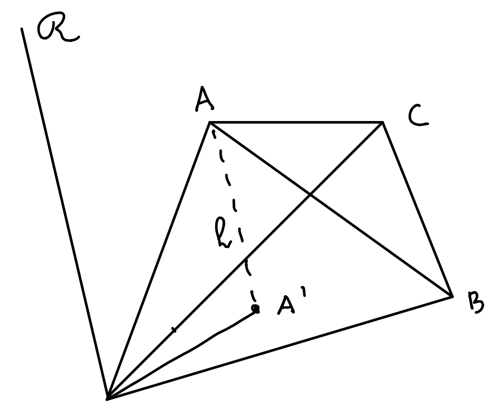
PROPOSIZIONE

Il volume del tetraedro $OABC$ è dato da

$$\frac{1}{6} \left| A \cdot (B \wedge C) \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \left| a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \right|$$

dimostrazione Sia Π il piano OBC e R la retta per l'origine ortogonale a Π.



Sia A' la proiezione di A sul piano Π

Sia S la superficie del triangolo OBC e sia $h = dist(A, A')$ l'altezza relativa a questo piano.

Allora se V è il volume

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

Inoltre $S = \frac{1}{2} \| B \wedge C \|$ quindi

$$V = \frac{1}{6} \| B \wedge C \| \cdot h$$

Osserviamo inoltre che $B \wedge C$ è ortogonale a Π quindi

$$\mathcal{R} = \mathbb{R} \quad B \wedge C$$

Per calcolare A' possiamo quindi applicare la formula determinata in precedenza per la proiezione su un piano

$$A' = A - \frac{A \cdot (B \wedge C)}{\| B \wedge C \|^2} B \wedge C = A - \alpha \; B \wedge C$$

con $\alpha = \dfrac{A \cdot (B \wedge C)}{\| B \wedge C \|^2}$. Quindi

$$h = dist\left(A, A'\right) = \| A - A' \| = \| \alpha \; B \wedge C \| = |\alpha| \, \| B \wedge C \|$$

$$= \frac{| A \cdot (B \wedge C) |}{\| B \wedge C \|^2} \| B \wedge C \| = \frac{| A \cdot (B \wedge C) |}{\| B \wedge C \|}$$

e infine

$$V = \frac{1}{6} \| B \wedge C \| \frac{| A \cdot (B \wedge C) |}{\| B \wedge C \|} = \frac{1}{6} \left| A \cdot (B \wedge C) \right|$$

Esplodendo il prodotto vettoriale e il prodotto scalare si trova la 2ª formula.

#