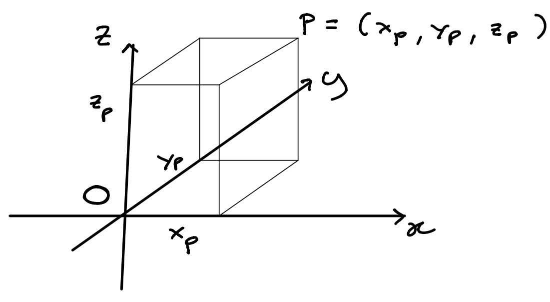
GEOMETRIA DEL PIANO E DELLO SPAZIO

Richiameremo alcuni concetti di geometria del piano e dello spazio.

- somma e prodotto per scalare, rette, segmenti, punto medio e baricentro
- distanza e prodotto scalare, piani
- alcune proprietà dei triangoli
- proiezioni ortogonali
- area di un triangolo
- prodotto vettoriale
- volume di un tetraedro

Rivedrete tutti questi argomenti più in generale in seguito. Ritengo però utile affrontare prima questo caso più concreto per fornire un ponte con quello che già state facendo a fisica o che avete già fatto alle superiori e per creare un bagaglio di esempi che possa essere utile in seguito.

Fissiamo una unità di lunghezza con la quale misurare le distanze e fissiamo nello spazio un'origine O e tre assi coordinati ortogonali tra loro e passanti per O. Su ogni asse fissiamo una direzione positiva e una negativa. Ogni elemento acquisisce quindi delle coordinate date dalle proiezioni sugli assi



SOMMA E PRODOTTO PER SCALARE

Come per i numeri complessi possiamo definire una somma tra gli elementi di $\mathbb{R}^3$. Se (x, y, z) e (x', y', z') sono elementi di $\mathbb{R}^3$ definiamo:

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z').$$

Per esempio

$$(1, 2, -3) + (3, -4, 2) = (4, -2, -1)$$

Questa operazione gode di alcune semplici proprietà:

A1 $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3 \qquad P + Q = Q + P$

A2 $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^3 \qquad (P + Q) + R = P + (Q + R)$

A3 $\forall P \in \mathbb{R}^3 \qquad P + O = P$

A4 $\forall P \in \mathbb{R}^3 \ \exists Q \in \mathbb{R}^3$ tale che $P + Q = O$

L'elemento Q di A4 si indica con $-P$.

Ho utilizzato il simbolo " $+$ " per distinguerlo dalla somma usuale di numeri ma in futuro lo indicheremo con $+$.
Non è invece possibile definire un prodotto tra elementi di $\mathbb{R}^3$ in modo che $\mathbb{R}^3$ sia un campo.
È però possibile definire il prodotto di un elemento di $\mathbb{R}^3$ per un numero reale. Per $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ definisco

$$\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Valgono le seguenti proprietà $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall P, Q \in \mathbb{R}^3$

A5 $\qquad 1 \cdot P = P$

A6 $\qquad \lambda \cdot (\mu \cdot P) = (\lambda\mu) \cdot P$

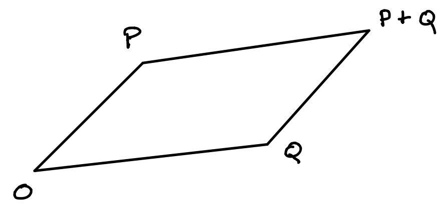
A7 $\qquad (\lambda + \mu) \cdot P = \lambda \cdot P + \mu \cdot P$

A8 $\qquad \lambda \cdot (P + Q) = \lambda \cdot P + \lambda \cdot Q$

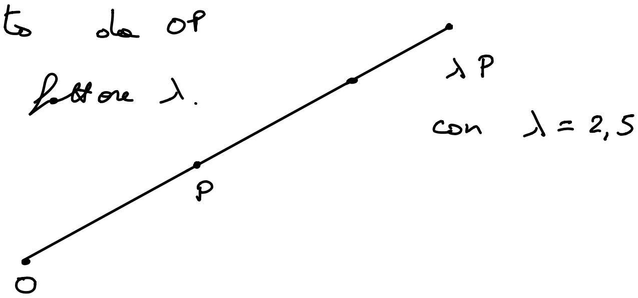
In seguito indicherò $\lambda \cdot P$ con λP

Geometricamente la somma di P e Q è il quarto vertice del parallelogramma

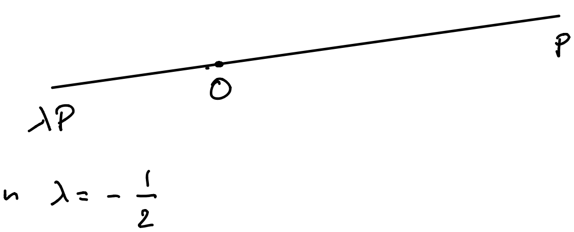
$O \quad P \quad P+Q \quad Q$



Se λ è un numero positivo $O\lambda P$ è il segmento ottenuto da OP dilatandolo di un fattore λ.



Se invece λ è un numero negativo $O\lambda P$ è sulla stessa retta ma nella direzione opposta



Traslazioni

Come abbiamo già visto con i numeri complessi la sola somma basta a descrivere facilmente le traslazioni. Se $u \in \mathbb{R}^3$ definiamo

$$T_u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{con}$$

$$T_u(v) = u + v$$

Differenza

Se $P, Q \in \mathbb{R}^3$ la differenza $Q - P = Q + (-P)$ viene indicata spesso con $\overrightarrow{PQ}$ e chiamata il vettore da P a Q.

Esercizio $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ST}$ se e solo se $PQTS$ sono i vertici di un parallelogramma.

Svolgimento

Osserviamo che $PQTS$ è un parallelogramma se e solo se traslando per $-P$ è un parallelogramma ovvero se O $Q-P$ $T-P$ $S-P$ è un parallelogramma ovvero

$$T-P = Q-P + S-P$$

che semplificando è equivalente a

$$T-S = Q-P$$

ovvero $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PQ}$

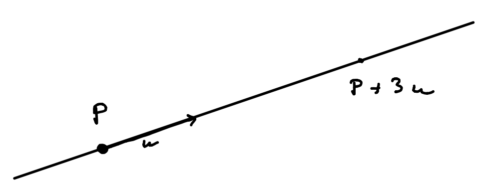
#

Rette e segmenti

DEFINIZIONE

Se $P \in \mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{R}^3$ con $u \neq 0$ la retta passante per P di direzione u è la retta

$$\{ P + tu : t \in \mathbb{R} \} = P + \mathbb{R}u$$



OSSERVAZIONE

Se P e $Q \in \mathbb{R}^3$ la retta c'è una unica retta che passa per P e Q e è la retta passante per P di direzione $\overrightarrow{PQ}$.

$$\mathcal{R} = \{ P + t\overrightarrow{PQ} : t \in \mathbb{R} \}$$

Al variare del parametro t, il punto $P + t\overrightarrow{PQ}$ percorre tutta la retta e abbiamo

per $t=0$ $\quad P + 0\overrightarrow{PQ} = P$

$t=1$ $\quad P + 1\overrightarrow{PQ} = P + Q - P = Q$

DEFINIZIONE

Se $P, Q \in \mathbb{R}$ con $P \neq Q$ il segmento tra P e Q è l'insieme

$$\{ P + t\overrightarrow{PQ} : 0 \leq t \leq 1 \}$$

OSSERVAZIONE

$$P + t\overrightarrow{PQ} = P + tQ - tP =$$

$$= (1-t)P + tQ$$

Se chiamo $s = 1-t$ abbiamo

$s + t = 1$ e

$P + t\overrightarrow{PQ} = sP + tQ$

In particolare la retta e il segmento tra P e Q possono anche essere descritti come

$$\text{retta} = \{ sP + tQ : s + t = 1 \}$$

$$\text{segmento} = \{ sP + tQ : s + t = 1 \text{ e } s, t \geq 0 \}$$

NOTA

Chi ha già fatto qualche pratica con i vettori alle superiori avrà già incontrato questo modo di descrivere una retta nello spazio.

Chi non avesse mai visto questo modo e non gli risultasse intuitivo, può prendere momentaneamente questa come la definizione di retta e analogamente per il segmento.

Più avanti vedremo come questa definizione sia equivalente ad una descrizione metrica delle rette. (vedi dopo)

PUNTO MEDIO E BARICENTRO

lemma - definizione

Dati P e $Q \in \mathbb{R}^3$ esiste un unico punto M tale che $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$

(intuitivamente il tratto tra P e M è uguale a quello tra M e Q).

Tale punto M si chiama il punto medio tra P e Q e abbiamo

$$M = \frac{P+Q}{2}$$

dim. $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$ è equivalente a

$$P - M = M - Q \quad \text{ovvero}$$

$$2M = P + Q \quad \text{ovvero}$$

$$M = \frac{P+Q}{2}$$

#

DEFINIZIONE

Più in generale se ho n-punti $P_1, P_2, \dots, P_n$ definisco il loro baricentro come

$$B = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n}$$

Rincontreremo il baricentro più avanti.

DISTANZA E PRODOTTO SCALARE

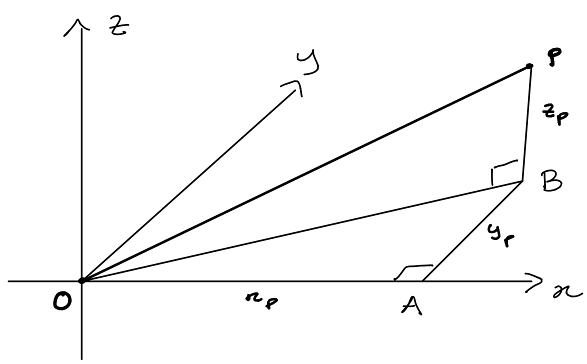
Vediamo ora come descrivere distanze e angoli.

Distanza

Se $P = (x_P, y_P, z_P)$ allora la distanza di P dall'origine

$$d(P, O) = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$$

Infatti consideriamo la figura seguente



dove B è la proiezione di P sul piano xy
e A la proiezione di B sulla retta x
I triangoli OBP e OAB sono

ortogonali. quindi per il teorema di Pitagora otteniamo:

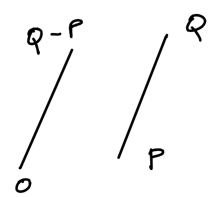
$$\mathrm{dist}(O,P)^2 = \mathrm{dist}(O,B)^2 + \mathrm{dist}(B,P)^2$$
$$= \mathrm{dist}(O,A)^2 + \mathrm{dist}(A,B)^2 + \mathrm{dist}(B,P)^2$$

ora osservo che $\mathrm{dist}(O,A)^2 = x_P^2$ $\quad \mathrm{dist}(A,B)^2 = y_P^2$ $\quad \mathrm{dist}(B,P)^2 = z_P^2$ quindi

$$\mathrm{dist}(O,P)^2 = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2$$

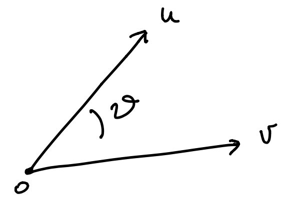
<u>NOTAZIONE</u> Se $P \in \mathbb{R}^3$ la distanza di P dall'origine si indica con $\|P\|$ e si chiama il modulo o la norma di P.

Calcoliamo adesso la distanza tra due punti $P=(x_P\ y_P\ z_P)$ e $Q=(x_Q, y_Q, z_Q)$. Se traslo tutto di $-P$, Q finisce in $Q-P$ e P nell'origine. Poiché le traslazioni conservano le distanze, abbiamo



$$\mathrm{dist}(P,Q) = \mathrm{dist}(O, Q-P) = \|Q-P\| =$$
$$= \sqrt{(x_Q-x_P)^2 + (y_Q-y_P)^2 + (z_Q-z_P)^2}$$

- **PRODOTTO SCALARE**. RICORDO CHE IL PRODOTTO SCALARE DI $u, v \in \mathbb{R}^3$ È DEFINITO COME



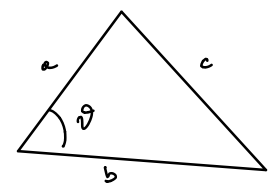
$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \vartheta$$

DOVE ϑ È L'ANGOLO IN FIGURA

PROPOSIZIONE Sia $u = (u_1\ u_2\ u_3)$ e $v = (v_1\ v_2\ v_3)$

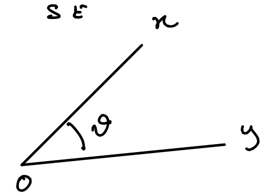
$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

dim Ricordo che se a, b, c sono i lati di un triangolo abbiamo



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta$$

DOVE ϑ È L'ANGOLO IN FIGURA. SE APPLICO QUESTA FORMULA AL CASO DEL TRIANGOLO $0\,x\,y$



$$\mathrm{dist}(x,y)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\, x \cdot y$$

DA CUI

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2\, u \cdot v$$

SEMPLIFICANDO OTTENGO $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

\#

LA FORMULA SI PUÒ USARE PER CALCOLARE L'ANGOLO ϑ INFATTI DALLA DEFINIZIONE DI $\cdot$ RICAVIAMO:

$$\cos \vartheta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\ \|v\|}$$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

Se $u, v \in \mathbb{R}^3$ SI OSSERVI CHE

$$\|u\|^2 = u \cdot v$$

$$u \text{ è ortogonale a } v \iff u \cdot v = 0$$

VALGONO INOLTRE LE SEGUENTI PROPRIETÀ CHE SI DICONO DI BILINEARITÀ :
$\forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^3$

$$u \cdot v = v \cdot u$$

$$u \cdot (\lambda v) = \lambda\,(u \cdot v)$$

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

LE PRIME DUE SEGUONO SIA DALLA DEFINIZIONE CHE DALLA FORMULA APPENA TROVATA. LA TERZA NON È OVVIA DALLA DEFINIZIONE MA È SEMPLICE DEDURLA DALLA FORMULA APPENA TROVATA.

QUESTE PROPRIETÀ SONO MOLTO IMPORTANTI E MOLTI ENUNCIATI DI GEOMETRIA CLASSICA SI POSSONO RICONDURRE AD ESSE. VEDREMO NELLA PROSSIMA SEZIONE ALCUNI ESEMPI. ORA APPLICHIAMO QUELLO CHE ABBIAMO VISTO ALLA DETERMINAZIONE DELLE EQUAZIONI DI UN PIANO

PIANI

VOGLIAMO VEDERE CHE I PIANI DI $\mathbb{R}^3$ SI POSSONO DESCRIVERE MEDIANTE UNA EQUAZIONE DEL TIPO

$$ax + by + cz = d$$

CON $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. FACCIAMO PRIMA DUE ESEMPI

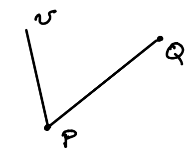
Esercizio. Scrivere l'equazione del piano Π passante per l'origine e ortogonale alla retta $\mathbb{R}u$ con $u = (1, 2, 3)$.

Svolgimento. Sia $v = (x, y, z)$ un punto di $\mathbb{R}^3$. v è un elemento del piano se e solo se è ortogonale a u ovvero se e solo se $v \cdot u = 0$. Più esplicitamente

$v \in \Pi$ se e solo se $x + 2y + 3z = 0$ #

Esercizio. Scrivere l'equazione del piano Π passante per $P=(1,1,1)$ e ortogonale alla retta PQ con $Q=(2,3,5)$.

Svolgimento Sia $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $v\in\Pi$ se e solo se $\overrightarrow{Pv}$ è ortogonale a $\overrightarrow{PQ}$ ovvero se e solo se



$$\overrightarrow{Pv}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$$

Più esplicitamente

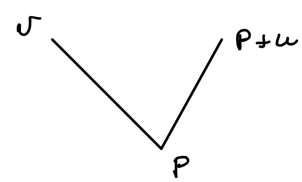
$$(x-1,y-1,z-1)\cdot(2-1,3-1,5-1)=0$$

ovvero $$x+2y+4z=7$$ #

Esercizio Scrivere l'equazione del piano Π passante per $P=(1,0,1)$ e ortogonale alla retta $\mathbb{R}u$ con $u=(1,1,1)$.

Svolgimento Osserviamo che le rette $\mathbb{R}u$ e $P+\mathbb{R}u$ sono una la traslata dell'altra e quindi parallele. Richiedere l'ortogonalità rispetto a $\mathbb{R}u$ o a $P+\mathbb{R}u$ è quindi equivalente. Procediamo quindi come in precedenza

Sia $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Allora $v\in\Pi$ se e solo se



$$\overrightarrow{Pv} \quad e \quad \overrightarrow{P\,P{+}u}=u$$

sono ortogonali ovvero $\overrightarrow{Pv}\cdot u=0$.

Più esplicitamente $$x+y+z=2$$ #

SIA ORA Π UN PIANO QUALSIASI E SIA $P=(x_P,y_P,z_P)$ UN SUO PUNTO. SIA $P+\mathbb{R}u$ LA RETTA PASSANTE PER P ORTOGONALE A Π, CON $u=(a,b,c)$ UN VETTORE NON NULLO. ALLORA

$$\Pi=\{v\in\mathbb{R}^3 : (v-P)\cdot u=0\}$$
$$=\{v\in\mathbb{R}^3 : v\cdot u=P\cdot u\}$$

OVVERO

$$\Pi=\{v=(x,y,z) : ax+by+cz=ax_P+by_P+cz_P\}$$

SE CHIAMO $d=ax_P+by_P+cz_P$ OTTENGO

$$\Pi=\{v=(x,y,z) : ax+by+cz=d\}$$

CHIUDIAMO QUESTA SEZIONE SUL PRODOTTO SCALARE CON UNA DISUGUAGLIANZA FAMOSA

PROPOSIZIONE (DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ)

SE $u, v \in \mathbb{R}^3$ ALLORA

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$$

E L'UGUAGLIANZA È VERIFICATA SE E SOLO SE u E v SONO UNO UN MULTIPLO DELL'ALTRO. (CIOÈ SE $u = \lambda v$ O $v = \lambda u$ CON $\lambda \in \mathbb{R}$).

dim Se $u = 0$ o $v = 0$ l'enunciato è ovvio.

Se $u, v \neq 0$ allora

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \, \|v\|} = |\cos \vartheta| \leq 1$$

da cui segue la disuguaglianza.

Inoltre vale $|\cos \vartheta| = 1$ se e solo $\vartheta = 0$ o π

ovvero se u, v e 0 sono sulla stessa retta #

APPENDICE (FUORI PROGRAMMA)

LA TRATTAZIONE FATTA SOPRA SI POGGIA SU ALCUNI RISULTATI DI GEOMETRIA (TIPO IL TEOREMA DI PITAGORA O QUELLO DEL COSENO) E SU ALCUNE DEFINIZIONE INTUITIVE (TIPO LA DEFINIZIONE DI RETTA). NON È NOSTRA INTENZIONE FARE UNA TRATTAZIONE AUTOCONTENUTA E COMPLETA DI QUESTI FONDAMENTI. IN QUESTA APPENDICE VOGLIAMO SOLO FARE QUALCHE OSSERVAZIONE SULLA DEFINIZIONE DI RETTA.

NELLA DIMOSTRAZIONE DELLA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY SCHWARZ QUANDO ABBIAMO STUDIATO IL CASO IN CUI VALE "=" ABBIAMO USATO DUE DIVERSE CARATTERIZZAZIONI DI RETTA: SE $u, v \neq \underline{0}$ ABBIAMO DETTO CHE

1) – $\underline{0}$, u, v SONO ALLINEATI SE $u = \lambda v$ CON $\lambda \in \mathbb{R}$

2) – $\underline{0}$, u, v SONO ALLINEATI SE L'ANGOLO ϑ È 0 O π

A PRIORI NON È DETTO CHE I DUE CONCETTI COINCIDANO. DIMOSTRIAMO CHE È COSÌ E CHE RIDIMOSTRIAMO CAUCHY-SCHWARZ IN MODO PIÙ DIRETTO

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ (2ª dim)

SE $u, v \in \mathbb{R}^3$ ALLORA

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$$

E L'UGUAGLIANZA È VERIFICATA SE E SOLO SE u E v SONO UNO UN MULTIPLO DELL'ALTRO.

dim Se $v=0$ allora otteniamo $0=0$ e $v = 0 \cdot u$. Supponiamo $v \neq 0$.

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \|u + tv\|^2 = (u+tv) \cdot (u+tv)$$
$$= \|u\|^2 + 2t \, u \cdot v + t^2 \|v\|^2$$

f è quindi un polinomio di secondo grado e $f(t) \geq 0$ per ogni t. Quindi

$$\Delta \leq 0$$

ovvero

$$4 (u \cdot v)^2 - 4 \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$$

da cui

$$(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \, \|v\|^2$$

che è equivalente alla disuguaglianza che vogliamo dimostrare.

Se vale = in questa disuguaglianza allora $\Delta = 0$

quindi $\exists \lambda :$ $f(\lambda) = 0$ ovvero $\|u + \lambda v\|^2 = 0$

da cui $u = -\lambda v$

#

A NOI INTERESSA SOPRATTUTTO CHE ABBIAMO CARATTERIZZATO QUANDO VALE "=" SENZA USARE GLI ANGOLI.

ALLORA VEDIAMO CHE SE $u, v \neq 0$

$$\vartheta = 0, \pi \iff |\cos \vartheta| = 1 \iff$$

$$\iff |u \cdot v| = \|u\| \, \|v\| \iff u \in \mathbb{R} v$$