ALCUNE OSSERVAZIONI GEOMETRICHE SUI NUMERI COMPLESSI

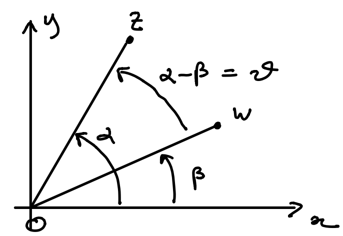
ABBIAMO UTILIZZATO I NUMERI COMPLESSI PER DESCRIVERE ALCUNE QUANTITÀ GEOMETRICHE.

ANGOLI, PRODOTTO SCALARE E AREA DI UN TRIANGOLO

SIANO $w, z \in \mathbb{C}$. CONSIDERIAMO IL PRODOTTO $z\bar{w}$.

SE $z = \rho e^{i\alpha}$ e $w = R e^{i\beta}$ con $\rho, R, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\rho, R \geq 0$ ABBIAMO

$$z\bar{w} = \rho R \, e^{i(\alpha-\beta)}$$

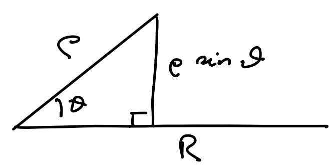


SE INDICO CON $\vartheta = \alpha - \beta$ L'ANGOLO, CON SEGNO, $z\hat{O}w$, ABBIAMO

$$z\bar{w} = \rho R \cos\vartheta + i\rho R \sin\vartheta$$

NOTIAMO CHE LA PARTE IMMAGINARIA DI QUESTA ESPRESSIONE:

$$\rho R \sin\vartheta$$



È UGUALE, A MENO DEL SEGNO, A DUE VOLTE L'AREA DEL TRIANGOLO zOw. INFATTI LA BASE Ow È LUNGA R E L'ALTEZZA $|\rho \sin\vartheta|$.

LA PARTE REALE $\rho R \cos\vartheta$ È INVECE DETTA PRODOTTO SCALARE DI z E w, E NOTIAMO CHE È UGUALE A 0 SE E SOLO SE $z\hat{O}w$ È UN ANGOLO RETTO.

CALCOLIAMO LE STESSE QUANTITÀ USANDO LE COORDINATE CARTESIANE.

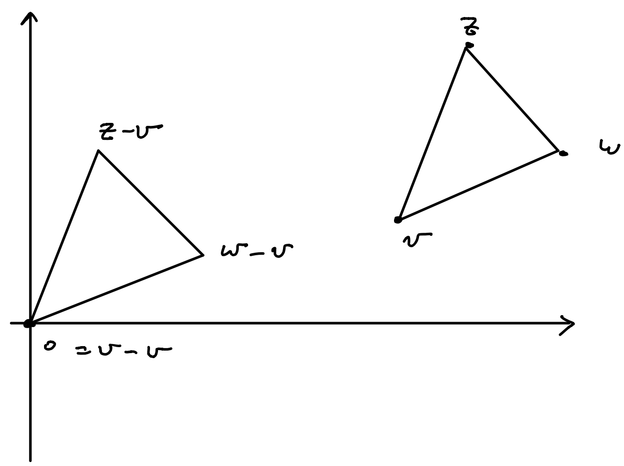
SE $z = x + iy$ e $w = u + iv$ OTTENIAMO

$$\mathrm{Re}(z\bar{w}) = \text{prodotto scalare} = xu + yv$$

$$|\mathrm{Im}(z\bar{w})| = 2\,\text{area}\,(z\,0\,w) = |yu - xv|$$

ENTRAMBE QUESTE FORMULE VERRANNO GEN. NEL PROSEGUIO DEL CORSO.

LE STESSE CONSIDERAZIONI SI POSSONO FARE NEL CASO DI UN TRIANGOLO QUALSIASI vwz TRASLANDO IL TRIANGOLO IN MODO DA PORTARE UN VERTICE NELL'ORIGINE



TRASLAZIONI, RIFLESSIONI, ROTAZIONI

VOGLIAMO ILLUSTRARE COME UTILIZZARE I NUMERI COMPLESSI PER DESCRIVERE ALCUNE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

traslazioni

Sia $w_0 \in \mathbb{C}$ e sia $T_{w_0} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$T_{w_0}(z) = z + w_0$$

Allora T_{w_0} è la traslazione del piano che porta 0 in w_0.

Rotazioni

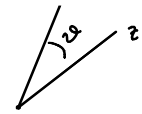
Sia $\vartheta \in [0, 2\pi]$ e definiamo $R_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$R_\theta(z) = e^{i\vartheta} z$$

allora $R_\theta(z)$ è un numero che ha lo stesso modulo di z ma $\arg(e^{i\vartheta} z) = \vartheta + \arg(z)$. Allora

$R_\theta(z)$

R_θ è la rotazione di angolo ϑ attorno all'origine.

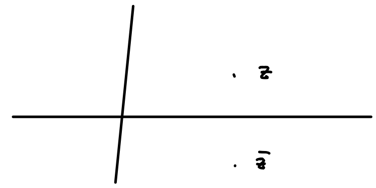


Riflessioni

Sia $S_0 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$S_0(z) = \bar{z}$$

Allora S_0 è la riflessione rispetto all'asse delle x.



Combinando queste isometrie si possono costruire tutte le altre. Facciamo un esempio

Esercizio. Descrivere la rotazione di $\frac{\pi}{6}$ attorno al punto $w_0 = 1+i$.

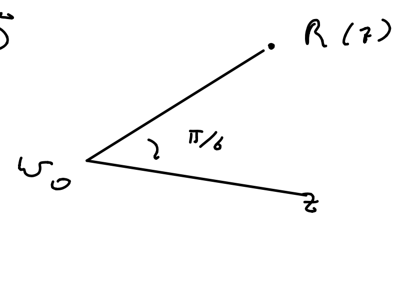
Svolgimento Costruiamo questa rotazione in tre passi

1) Applichiamo una traslazione che porta w_0 in 0 cioè applico T_{-w_0}
2) Facciamo la rotazione di $\frac{\pi}{6}$ attorno all'origine cioè applichiamo $R_{\frac{\pi}{6}}$
3) Ritrasliamo tutto portando l'origine in w_0. cioè applichiamo T_{w_0}

Ovvero sto dicendo che la rotazione cercata è

$$R = T_{w_0} \circ R_{\frac{\pi}{6}} \circ T_{-w_0}$$

Controlliamo che sia vero. devo verificare che se $z \in \mathbb{C}$ allora l'angolo tra il segmento $w_0 z$ e il segmento $w_0 R(z)$ è $\pi/6$.



Se applico la traslazione T_{-w_0} vedo che questo è equivalente a far

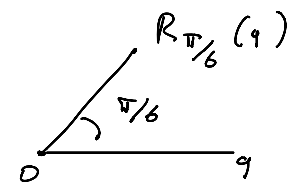
vedere che tra i segmenti traslati c'è un angolo di $\frac{\pi}{6}$.
Calcolo allora

$$T_{-w_0}(w_0) = 0$$

$$T_{-w_0}\left(R(z)\right) = \cancel{T_{-w_0}} \circ \cancel{T_{w_0}} \circ R_{\pi/6} \circ T_{-w_0}(z)$$

$$= R \circ T_{-w_0}(z)$$

$T_{-w_0}(z)$ che chiamo q



Quindi è come verificare che tra Oq e $O R_{\pi/6}(q)$ c'è un angolo di $\pi/6$. Ma questo è vero perché $R_{\pi/6}$ è la rotazione di $\pi/6$.

Quindi

$$R(z) = T_{+w_0}\left(R_{\pi/6}\left(T_{-w_0}(z)\right)\right) =$$

$$= e^{i\pi/6}\left(z-1-i\right)+1+i$$

#