I NUMERI COMPLESSI

A COSA SERVONO I NUMERI COMPLESSI

I NUMERI COMPLESSI HANNO UN'ORIGINE DIVERSA DA QUELLA DEI NUMERI INTERI O DEI NUMERI REALI, CHE DA ALCUNI PUNTI DI VISTA LI RENDE MENO INTUITIVI E PIÙ ASTRATTI. MENTRE I NUMERI INTERI E I NUMERI REALI SONO LEGATI A DUE OPERAZIONI NATURALI COME QUELLE DI CONTARE E MISURARE, I NUMERI COMPLESSI NASCONO COME ARTIFICIO MATEMATICO, E PIÙ PRECISAMENTE COME STRUMENTO UTILE PER RISOLVERE ALCUNI PROBLEMI LEGATI ALLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI POLINOMIALI DI 3° GRADO. IN QUALCHE SENSO I NUMERI REALI E I NUMERI INTERI SONO LA DESCRIZIONE MATEMATICA DI QUALCOSA DI CUI ABBIAMO GIÀ ESPERIENZA MENTRE I NUMERI COMPLESSI SONO UNA INVENZIONE. COME DICEVAMO QUESTO PUÒ RENDERLI MENO INTUITIVI E QUINDI PIÙ OSTICI ALL'INIZIO. COME VEDREMO PERÒ I NUMERI COMPLESSI HANNO DA MOLTI PUNTI DI VISTA PROPIETÀ MIGLIORI DEI NUMERI REALI, E SONO UTILI PER RISOLVERE MOLTI PROBLEMI.
LE PROPIETÀ DEI NUMERI COMPLESSI CHE LI RENDONO UTILI SONO ESSENZIALMENTE QUESTE DUE:

- I NUMERI COMPLESSI SI POSSONO SOMMARE E MOLTIPLICARE E VALGONO LE STESSE PROPIETÀ DI SEMPLIFICAZIONE E MANIPOLAZIONE DELLE ESPRESSIONI
- OGNI EQUAZIONE POLINOMIALE DI GRADO ≥ 1 HA SOLUZIONE.

LA DEFINIZIONE DI CAMPO

I NUMERI REALI, CHE INDICHEREMO CON $\mathbb{R}$, HANNO LE SEGUENTI PROPRIETÀ ALGEBRICHE

- È DEFINITA UNA SOMMA, CIOÈ DATI $a, b \in \mathbb{R}$ È POSSIBILE CALCOLARE UN NUOVO ELEMENTO $a+b$

- È DEFINITO UN PRODOTTO, CIOÈ DATI $a, b \in \mathbb{R}$ È POSSIBILE CALCOLARE UN NUOVO ELEMENTO $a \cdot b$

- IN $\mathbb{R}$ CI SONO DUE ELEMENTI $0, 1$ DISTINTI

P1 • PROPRIETÀ COMMUTATIVA. $\forall a, b \in \mathbb{R}$
$a+b = b+a$ e $a \cdot b = b \cdot a$

P2 • PROPRIETÀ ASSOCIATIVA. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
$(a+b)+c = a+(b+c)$ $\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

P3 • PROPRIETÀ DI 0 e 1. $\forall a \in \mathbb{R}$

$0 + a = a$ e $1 \cdot a = a$

P4 • ESISTENZA DELL'OPPOSTO. $\forall a \in \mathbb{R}$ esiste un unico $b \in \mathbb{R}$ tale che $a + b = 0$.

P5 • ESISTENZA DEL RECIPROCO. $\forall a \in \mathbb{R}$ diverso da 0 esiste un unico $b \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot b = 1$.

P6 • PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

ANCHE I NUMERI RAZIONALI, CHE INDICHEREMO CON $\mathbb{Q}$, HANNO LE STESSE PROPRIETÀ. IN GENERALE UN INSIEME K SUL QUALE SONO DEFINITE DUE OPERAZIONI, $+$ e $\cdot$ E SONO FISSATI DUE ELEMENTI DISTINTI 0 E 1 E PER IL QUALE VALGONO LE PROPRIETÀ ELENCATE SOPRA SI DICE UN CAMPO.

NATURALMENTE PER $\mathbb{R}$ O PER $\mathbb{Q}$ VALGONO MOLTE ALTRE PROPRIETÀ ALGEBRICHE. IN REALTÀ TUTTE LE PROPRIETÀ CHE ABBIAMO IMPARATO AD UTILIZZARE PER MANIPOLARE LE ESPRESSIONI, OVVERO LE PROPRIETÀ CHE PERMETTONO DI FARE I CONTI, SI POSSONO DEDURRE DA QUELLE ELENCATE SOPRA, E QUINDI VALGONO IN UN QUALSIASI CAMPO. FACCIAMO ALCUNI ESEMPI PER CONVINCERSENE

ESEMPIO 1 SIA K UN CAMPO (PER ESEMPIO $\mathbb{Q}$ O $\mathbb{R}$) ALLORA

$$\forall a \in K \quad 0 \cdot a = 0$$

dimostrazione

Sia $x = a \cdot 0$. Per P3 $0 = 0 + 0$ quindi

$$x = a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \overset{P6}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = x + x$$

QUINDI $x = x + x$. PER P4 $\exists\, y$ TALE CHE $y + x = 0$

QUINDI

$$0 = y + x = y + (x + x) \overset{P2}{=} (y + x) + x = 0 + x \overset{P3}{=} x$$

OVVERO $a \cdot 0 = x = 0$ #

ESEMPIO 2 LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA ED ASSOCIATIVA DELLA SOMMA CI DICONO CHE QUANDO ABBIAMO UNA SOMMA DI PIÙ TERMINI NON CONTA L'ORDINE CON CUI SI SOMMANO. PER ESEMPIO

$$((7 + 8) + 13) + 22 = (7 + 13) + (8 + 22) = 20 + 30 = 50$$

PER QUESTO MOTIVO LE PARENTESI IN QUESTO CASO NON SI SCRIVONO PROPRIO.

UNA OSSERVAZIONE ANALOGA SI PUÒ FARE PER IL PRODOTTO

ESEMPIO 3 I NUMERI REALI HANNO, OLTRE SOMMA E PRODOTTO, ALTRE DUE OPERAZIONI, SOTTRAZIONE E DIVISIONE. ANCHE QUESTE POSSIAMO RICOSTRUIRLE A PARTIRE DA $+$ e $\cdot$ E DALLE PROPRIETÀ DI CAMPO.

PER P4 DATO $a \in K$ ESISTE UN UNICO $b \in K$ TALE CHE $b + a = 0$. QUESTO ELEMENTO SI CHIAMA L'OPPOSTO DI a E SI INDICA CON $-a$.

DEFINIAMO LA SOTTRAZIONE COME
$$x - y = x + (-y)$$

SIMILMENTE PER P5 DATO $a \in K$ $a \neq 0$ ESISTE UN UNICO $b \in K$ TALE $b \cdot a = 1$. QUESTO ELEMENTO SI CHIAMA IL RECIPROCO O L'INVERSO E SI INDICA CON $\frac{1}{a}$ O CON a^{-1}.

SE $y \neq 0$ DEFINIAMO LA DIVISIONE COME
$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$$

ESEMPIO 4 $\forall a, b \in K$
$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

dim Osserviamo che
$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Esempio}}}{=} 0 \cdot b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definiz. di } -a}}{=} (a + (-a)) \cdot b \underset{\substack{\uparrow \\ P6}}{=} a \cdot b + (-a) \cdot b$$

quindi
$$0 = a \cdot b + (-a) \cdot b$$

da cui
$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$ #

Esercizio Scegliere una proprietà algebrica a scelta dei numeri reali e dedurla da P1, ..., P6

DEFINIZIONE DEI NUMERI COMPLESSI

DEFINIREMO ORA UN INSIEME $\mathbb{C}$ MUNITO DI DUE OPERAZIONI CHE INDICHEREMO CON $+_{\mathbb{C}}$ E $\cdot_{\mathbb{C}}$.

COME INSIEME $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$

DEFINIZIONE DI $+_{\mathbb{C}}$ E $\cdot_{\mathbb{C}}$. SE $(a, b); (c, d) \in \mathbb{C}$

$$(a, b) +_{\mathbb{C}} (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot_{\mathbb{C}} (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

DEFINIZIONE DI $0_{\mathbb{C}}$ E $1_{\mathbb{C}}$.

$$0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$$

$$1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$$

UTILIZZIAMO PER ADESSO I SIMBOLI $+_{\mathbb{C}}$, $\cdot_{\mathbb{C}}$, $1_{\mathbb{C}}$, $0_{\mathbb{C}}$; PER DISTINGUERLI DA $+, \cdot, 0$, E 1 TRA I NUMERI REALI. IN SEGUITO INDICHEREMO SOMMA, PRODOTTO, ZERO UNO ANCHE DEI NUMERI COMPLESSI CON $+, \cdot, 0, 1$.

LA DEFINIZIONE DEL PRODOTTO PUÒ SEMBRARE AL MOMENTO UN PO' COMPLICATA E ASTRUSA MA COME VEDREMO PRESTO HA UNA SUA RAGIONE D'ESSERE.

Esercizio Calcolare

$(3, 1) +_{\mathbb{C}} (-1, 5) =$ $\quad (= (2, 5))$

$(3, 1) \cdot_{\mathbb{C}} (-1, 5) =$ $\quad (= (-8, 14))$

$(0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} (0, 1) =$ $\quad (= (-1, 0))$

$(3, 4) \cdot_{\mathbb{C}} \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25} \right) =$ $\quad (= (1, 0))$

TEOREMA $\mathbb{C}$ con somma, prodotto, $0_{\mathbb{C}}$, $1_{\mathbb{C}}$ definiti sopra è un campo, ovvero soddisfa le proprietà P1, P2, P3, P4, P5, P6.

dim La dimostrazione di questo teorema è una lunga verifica delle proprietà P1 ... P6. Ne verifichiamo solo alcune

P3 $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$

$$0_{\mathbb{C}} +_{\mathbb{C}} (a,b) = (0,0) +_{\mathbb{C}} (a,b) = (0+a, 0+b) = (a,b)$$

$$1_{\mathbb{C}} \cdot_{\mathbb{C}} (a,b) = (1,0) \cdot_{\mathbb{C}} (a,b) =$$
$$= (1\cdot a - 0\cdot b, 1\cdot b + 0\cdot a) = (a,b)$$

P4 $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$

$(x,y) +_{\mathbb{C}} (a,b) = 0_{\mathbb{C}}$ se e solo se

$x = -a$ e $y = -b$ quindi $\exists_1 (x,y) : (x,y)+(a,b) = 0_{\mathbb{C}}$

P5 $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$ e $(a,b) \neq (0,0)$

esiste il reciproco infatti $a^2+b^2>0$ e

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2} ; -\frac{b}{a^2+b^2}\right)\cdot(a,b) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} ; \frac{ab-ab}{a^2+b^2}\right) = (1,0) = 1_{\mathbb{C}}$$

unicità del reciproco. Se $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$ e

$u, v \in \mathbb{C}$ e $uz = vz = 1_{\mathbb{C}}$ voglio mostrare $u = v$.

Infatti

$$u = u \cdot_{\mathbb{C}} 1_{\mathbb{C}} = u \cdot_{\mathbb{C}} (z \cdot_{\mathbb{C}} v) = (u \cdot_{\mathbb{C}} z) \cdot_{\mathbb{C}} v = 1_{\mathbb{C}} \cdot v = v$$

P6 $\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{C}$

$$(a,b) \cdot_{\mathbb{C}} \left((c,d) + (e,f)\right) = (a,b) \cdot_{\mathbb{C}} (c+e, d+f) =$$
$$= \left(a\cdot(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e)\right)$$
$$= (a\cdot c - bd + ae - bf, ad + bc + af + be)$$

$$= \left(a\cdot c - b\cdot d,\ ad + bc\right) +_{\mathbb{C}} \left(ae - bf,\ af + be\right)$$

$$= (a,b) \cdot_{\mathbb{C}} (c,d) +_{\mathbb{C}} (a,b) \cdot_{\mathbb{C}} (e,f)$$

Lasciamo la verifica di P1 e P2 per esercizio. #

NUMERI REALI, NUMERI COMPLESSI E i

I NUMERI COMPLESSI SONO QUINDI UN CAMPO. VOGLIAMO ORA MOSTRARE QUALE SIA LA RELAZIONE TRA $\mathbb{R}$ E $\mathbb{C}$. SE $a \in \mathbb{R}$ DEFINIAMO $\underline{a} = (a, 0)$

OSSERVIAMO CHE $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$

1) $\underline{0} = 0_{\mathbb{C}}$ $\qquad \underline{1} = 1_{\mathbb{C}}$

2) $\underline{a+b} = \underline{a} +_{\mathbb{C}} \underline{b}$

3) $\underline{a\cdot b} = \underline{a} \cdot_{\mathbb{C}} \underline{b}$

4) $\underline{a} \cdot (b, c) = (ab, ac)$

LE RELAZIONI 1) 2) 3) CI DICONO IN PARTICOLARE CHE SE IDENTIFICHIAMO $\mathbb{R}$ CON IL SOTTOINSIEME DI $\mathbb{C}$ FATTO DELLE COPPIE $(a, 0)$ ALLORA LA NUOVA SOMMA $+_{\mathbb{C}}$ E IL NUOVO PRODOTTO $\cdot_{\mathbb{C}}$ COINCIDONO CON LA SOMMA E IL PRODOTTO USUALE SU $\mathbb{R}$.

PER QUESTO MOTIVO DA ORA IN POI

1) IDENTIFICHEREMO UN ELEMENTO $a \in \mathbb{R}$ CON LA COPPIA $(a, 0)$. PENSEREMO QUINDI $\mathbb{R}$ COME SOTTOINSIEME DI $\mathbb{C}$.

2) UTILIZZEREMO I VECCHI SIMBOLI $+,\ \cdot,\ 0,\ 1$ ANCHE PER INDICARE $+_{\mathbb{C}},\ \cdot_{\mathbb{C}},\ 0_{\mathbb{C}},\ 1_{\mathbb{C}}$

Esempio CON LE IDENTIFICAZIONI APPENA INTRODOTTE ABBIAMO

$$(5, 3) = (5, 0) + (0, 3) = 5 + 3\cdot(0, 1)$$

E PIÙ IN GENERALE

$$(a, b) = a + b\cdot(0, 1)$$

DEFINIZIONE $\quad i = (0, 1)$

OSSERVAZIONE $\quad i^2 = (0, 1)\cdot(0, 1) = (-1, 0) = -1$

OSSERVIAMO INOLTRE CHE $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

$$(a, b) = a + b\cdot(0, 1) = a + b\cdot i$$

DA ORA IN POI SCRIVEREMO I NUMERI COMPLESSI QUASI SEMPRE NELLA FORMA $a+bi$ INVECE CHE NELLA FORMA (a, b)

UTILIZZANDO QUESTA NOTAZIONE SIA LA FORMULA DELLA SOMMA CHE DEL PRODOTTO DIVENTANO NATURALI

$$(3 + 5i) + (4 + 2i) = 7 + 5i + 2i = 7 + 7i$$

$$(3 + 5i)\cdot(4 + 2i) = 3\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot i + 5\cdot i\cdot 4 + 5i\cdot 2i =$$

$$= 12 + 10i^2 + 6i + 20i$$

$$= 12 - 10 + 26i$$

$$= 2 + 26i$$

DOVE NEI PASSAGGI CHE HO FATTO HO UTILIZZATO LE PROPRIETÀ P1... P6 E CHE $i^2 = -1$.

ANCHE IL CALCOLO DEL RECIPROCO DIVENTA MOLTO SIMILE ALLA RAZIONALIZZAZIONE DELLE FRAZIONI. FACCIAMO UN ESEMPIO:

SUPPONIAMO DI VOLER CALCOLARE $\dfrac{1}{1+2i}$

MOLTIPLICHIAMO SOPRA E SOTTO PER $1-2i$

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{1^2-(2i)^2} =$$

$$= \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Esercizi

1) Dimostrare che per $\mathbb{C}$ valgono le proprietà P1 e P2

2) Calcolare

$$\frac{1+2i}{1-2i} \quad ; \quad \frac{1+4i}{6+7i}$$

Parte reale, parte immaginaria, coniugato

Introduciamo un po' di notazione che sarà utile in seguito. Se $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\text{parte reale di } z = \operatorname{Re}(z) = a$$

$$\text{parte immaginaria di } z = \operatorname{Im}(z) = b$$

$$\text{coniugato di } z = \overline{z} = a - bi$$

Per esempio se $z = 3 + 4i$

$$\operatorname{Re}(z) = 3$$

$$\operatorname{Im}(z) = 4 \qquad (\text{e non } 4i\,!!)$$

$$\overline{z} = 3 - 4i$$

Il coniugato ha alcune buone proprietà che elenchiamo nella seguente proposizione e che saranno utili in seguito.

Proposizione

$\forall\, z, w \in \mathbb{C}$ vale 0) $\overline{\overline{z}} = z$

1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

3) $z \in \mathbb{R}$ se e solo se $z = \overline{z}$

dim

Sia $z = a + bi$ e $c = c + di$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

verifichiamo la 1) e la 3).

1) $\overline{z+w} = \overline{a+bi + c+di} =$

$= \overline{a+c + (b+d)i} =$

$= a+c - (b+d)i =$

$= a - bi + c - di =$

$= \overline{z} + \overline{w}$

3) SE $z = a+bi$ ALLORA $z \in \mathbb{R}$ SE E SOLO SE $b=0$.

OSSERVIAMO INOLTRE CHE $z = \overline{z}$ SE E SOLO SE

$a+bi = a-bi$ OVVERO $bi = -bi$

OVVERO $2bi = 0$ OVVERO $b=0$.

QUINDI ENTRAMBE LE CONDIZIONI $z \in \mathbb{R}$ E $z = \overline{z}$ SONO EQUIVALENTI A $b=0$.

#

IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

RICORDIAMO IL NOSTRO OBIETTIVO INIZIALE, COSTRUIRE UN CAMPO NEL QUALE OGNI EQUAZIONE POLINOMIALE AVESSE SOLUZIONE. ABBIAMO INFATTI IL SEGUENTE TEOREMA CHE SI CHIAMA TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

TEOREMA (Gauss)

SE $f(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_0$, CON $A_n \neq 0$ E $n \geq 1$ È UN POLINOMIO A COEFFICIENTI COMPLESSI, CIOÈ $A_n, \dots, A_0 \in \mathbb{C}$ ALLORA ESISTE $\alpha \in \mathbb{C}$ E $f(\alpha) = 0$

DI QUESTO TEOREMA DIMOSTREREMO SOLO ALCUNI CASI MOLTO PARTICOLARI

EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

$$Az + B = 0 \qquad \text{CON } A \neq 0$$

SI POSSONO RISOLVERE ESATTAMENTE COME NEL CASO DI $\mathbb{R}$. FACCIAMO UN ESEMPIO.

$$(3+i)z + (-2+i) = 0$$

SOMMO $2-i$ E DIVO PER $3+i$ E OTTENGO

$$z = \frac{2-i}{3+i} = \frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$A z^2 + B z + C = 0 \qquad \text{con } A \neq 0$$

INIZIAMO DA ALCUNI ESEMPI. T

1). $z^2 = 13$

2). $z^2 = -9$

3). $z^2 + 6z + 25 = 0$

L'EQUAZIONE 1) LA SAPPIAMO RISOLVERE ANCHE USANDO I NUMERI REALI E OTTENIAMO $z = \pm\sqrt{13}$

L'EQUAZIONE 2) NON HA SOLUZIONI REALI MA HA SOLUZIONI COMPLESSE. INFATTI SE $z = \pm 3i$ OTTENIAMO $z^2 = 9i^2 = -9$.

SIMILMENTE OGNI EQUAZIONE DELLA FORMA $z^2 = a$ CON $a \in \mathbb{R}$ HA SOLUZIONI COMPLESSE

PER L'EQUAZIONE 3) PROCEDIAMO COME AL SOLITO CALCOLIAMO IL Δ

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 25 = -64$$

NEL CASO REALE Δ NON SAREBBE UN QUADRATO, NEL CASO COMPLESSO INVECE

$$(\pm 8i)^2 = -64 = \Delta$$

E CONCLUDIAMO USANDO LA FORMULA USUALE

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = \begin{cases} -3+4i \\ -3-4i \end{cases}$$

VEDIAMO ADESSO DEGLI ESEMPI IN CUI ANCHE I COEFFICIENTI SONO COMPLESSI.

4) $z^2 = -5 + 12i$

5) $3z^2 + 2iz + \frac{1}{12} - i = 0$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE 4). SIA $z = x + iy$ CON $x, y \in \mathbb{R}$. ABBIAMO QUINDI

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

QUINDI OTTENIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \quad \text{DA CUI} \quad \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = -5 \end{cases}$$

SVILUPPANDO LA SECONDA EQUAZIONE OTTENIAMO

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

DA CUI $x^2 = \dfrac{-5 \pm 13}{2} \;\Big\langle\; \begin{matrix} 4 \\ -9 \end{matrix}$.

ESSENDO $x \in \mathbb{R}$ ABBIAMO $x^2 \geq 0$ E QUINDI $x^2 = 4$

QUINDI $x = +2$ E $y = \frac{6}{x} = 3$ E $z = 2 + 3i$

O $x = -2$ E $y = \frac{6}{x} = -3$ E $z = -2 - 3i$

PROCEDENDO ALLO STESSO MODO SI RISOLVE $z^2 = w$ PER OGNI $w \in \mathbb{C}$.

OSSERVAZIONE. SE $a \in \mathbb{R}$ $a \geq 0$ $\sqrt{a}$ INDICA L'UNICO NUMERO REALE $b \geq 0$ TALE CHE $b^2 = a$.

SE w È UN NUMERO COMPLESSO NON C'È UNA RADICE PRIVILEGIATA E INDICHEREMO CON $\sqrt{w}$ UNA QUALSIASI RADICE O ANCHE L'INSIEME DELLE RADICI.

RISOLVIAMO ORA L'EQUAZIONE 5). PER UNA QUALSIASI EQUAZIONE DELLA FORMA

$$Az^2 + Bz + C = 0 \quad \text{CON } A \neq 0$$

POSSIAMO APPLICARE LA FORMULA USUALE

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

INFATTI ANCHE LA VALIDITÀ DI QUESTA FORMULA DIPENDE SOLO DALLE PROPRIETÀ DI CAMPO. LA DIFFERENZA CON IL CASO REALE È CHE UNA RADICE QUADRATA ESISTE SEMPRE.

NEL CASO IN QUESTIONE ABBIAMO

$$\Delta = B^2 - 4AC = -4 - 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{12} - i\right)$$

$$= -4 - 1 + 12i = -5 + 12i$$

LE RADICI DI Δ LE ABBIAMO APPENA CALCOLATE RISOLVENDO L'EQUAZIONE 4) E SONO $\pm(2+3i)$, QUINDI

$$z = \frac{-2i \pm (2+3i)}{2 \cdot 3} = \begin{cases} \dfrac{2+i}{6} \\[2ex] \dfrac{-2-5i}{6} \end{cases}$$