GUIDA ALLO STUDIO DI ALG. LINEARE

IN QUESTI APPUNTI TROVATE QUALCHE INDICAZIONE MOLTO GENERALE PER LA PREPARAZIONE DELLA PRIMA PARTE DEL CORSO DI GEOM. E ALG. LINEARE.

HO DIVISO QUESTE INDICAZIONI NELLE 5 VOCI SEGUENTI:

- NUMERI COMPLESSI
- PRODOTTO SCALARE E VETTORIALE IN $\mathbb{R}^3$
- K^n E MATRICI
- SPAZI VETTORIALI, BASI, DIMENSIONE
- APPLICAZIONI LINEARI
- AUTOVALORI, AUTOVETTORI E DIAGONALIZZAZIONE

PER OGNI VOCE TROVATE QUALCHE INDICAZIONE BIBLIOGRAFICA E QUALCHE PRECISAZIONE SULLE NOTAZIONI USATE NEL CORSO CHE POSSONO ESSERE DIVERSE DA QUELLE CHE TROVATE NEI LIBRI DI TESTO.

NEL COMPITINO ASPETTATEVI ALMENO UNA DOMANDA PER OGNUNO DI QUESTI SEI PUNTI

NUMERI COMPLESSI

PER QUELLO CHE ABBIAMO FATTO SUI NUMERI COMPLESSI POTETE FARE RIFERIMENTO ALLE NOTE CHE TROVATE SULLA PAGINA WEB DEL CORSO E AGLI ESERCIZI DEL FOGLIO DEGLI ESERCIZI

- LE NOTE SUI NUMERI COMPLESSI E I POLINOMI SONO MOLTO IMPORTANTI

  IN TUTTO LO STUDIO DEGLI AUTOVALORI.

PRODOTTO SCALARE E VETTORIALE IN $\mathbb{R}^3$

PER QUESTO ARGOMENTO, CHE ABBIAMO TRATTATO MOLTO BREVEMENTE POTETE FAR RIFERIMENTO ALLA NOTA CHE TROVATE SULLA PAGINA WEB DEL CORSO E ALLA SEZIONE "PROBLEMI VARI" DEL FOGLIO DEGLI ESERCIZI.

K^n E MATRICI

ARGOMENTI:

A • DEFINIZIONE DI SOMMA E PRODOTTO PER SCALARE

B • PRODOTTO TRA MATRICI

C • MATRICE IDENTITÀ $n \times n$ I_n

D • MATRICI QUADRATE INVERTIBILI

E • TRASPOSTA DI UNA MATRICE, TRACCIA DI UNA MATRICE MATRICI SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE.

F • SISTEMI LINEARI E MATRICI: MATRICE ASSOCIATA AD UN SISTEMA LINEARE E MATRICE COMPLETA ASSOCIATA AD UN SISTEMA LINEARE

G • MATRICI A SCALINI E MATRICI A SCALINI IN FORMA FORTE, RANGO DI UNA MATRICE A SCALINI

M • RIDUZIONE DI UNA MATRICE A SCALINI, TRASFORMAZIONI ELEMENTARI : R_{ij}, $R_i(\alpha)$, $R_{ij}(\alpha)$, RANGO DI UNA MATRICE

I • ROUCHÉ - CAPELLI

GLI ARGOMENTI DA A A H LI TROVATE NELLE SEZIONI 1.2 E 1.3 DEL LIBRO. IL PUNTO I LO TROVATE NELLA SEZIONE 1.5 CHE PERÒ È UN PO' DIVERSA DA COME LO ABBIAMO TRATTATO IN CLASSE. QUESTO TEOREMA E QUALCHE ALTRA OSS SUI SISTEMI LINEARI LI TROVATE ANCHE NELLE NOTE "SISTEMI LINEARI E MATRICI"

NOTAZIONI

- LE COLONNE DI UNA MATRICE IL LIBRO LE INDICA CON $A_{(j)}$ E LE RIGHE CON $A^{(i)}$, A LEZIONE HO FATTO SPESSO IL VICEVERSA.
- LE TRASFORMAZIONI ELEMENTARI R_{ij} $R_i(\alpha)$ $R_{ij}(\alpha)$ IL LIBRO LE INDICA CON LA LETTERA MINUSCOLA. E A LEZIONE SI SONO INDICATI A VOLTE CON M INVECE CHE CON R

SPAZI VETTORIALE, BASI, DIMENSIONE

ARGOMENTI:

- DEFINIZIONE DI SPAZIO VETTORIALE
- ESEMPI : K^n, MATRICI, VETTORI GEOMETRICI $\overrightarrow{AB}$, FUNZIONI
- SOTTOSPAZI, INTERSEZIONE E SOMMA
- GENERATORI, VETT. LIN. INDIP, BASI
- DIMENSIONE
- FORMULA DI GRASSMANN
- SOMMA DIRETTA DI SOTTOSPAZI

TUTTI QUESTI ARGOMENTI LI TROVATE NELLE SEZIONI 1.1 E 1.4 DEL LIBRO. A LEZIONE ABBIAMO DATO UNA DIMOSTRAZIONE PIÙ "CONCRETA" DEL TEOREMA CHE AFFERMA CHE TUTTE LE BASI HANNO LA STESSA CARDINALITÀ CHE TROVATE ALLA PAGINA WEB. PER IL RESTO LA TRATTAZIONE È MOLTO SIMILE.

A LEZIONE ABBIAMO INTRODOTTO LA SEGUENTE NOTAZIONE DI CUI ABBIAMO FATTO USO SISTEMATICO IN TUTTO IL PRIMO SEMESTRE.

Sia $v_1 \dots v_n$ UNA BASE DI V E SIA $v \in V$. QUINDI ESISTONO $a_1 \dots a_n \in K$ UNIVOCAMENTE DETERMINATI TALI CHE

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

I COEFFICIENTI $a_1 \dots a_n$ SONO DETTE LE COORDINATE DI v RISPETTO ALLA BASE $v_1 \dots v_n$ E PONIAMO

$$[v]_{v_1 \dots v_n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

LO SPAZIO VETTORIALE GENERATO È $\langle v_1 \dots v_n \rangle$ ALTRI LO INDICANO CON $\mathrm{Span}(v_1 \dots v_n)$.

APPLICAZIONI LINEARI

ARGOMENTI:

A • DEFINIZIONE

B • NUCLEO E IMMAGINE

C • UNA APPLICAZIONE È DETERMINATA UNIVOCAMENTE DAI VALORI CHE ASSUME SU UNA BASE

D • FORMULA DELLA DIMENSIONE

E • APPLICAZIONI LINEARI DA K^n A K^m

F • MATRICI ASSOCIATE AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

G • $[F]^{\underline{u}}_{\underline{v}} \, [x]_{\underline{u}} = [F(x)]_{\underline{v}}$

$[F \circ G]^{\underline{u}}_{\underline{w}} = [F]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot [G]^{\underline{u}}_{\underline{v}}$

H • $\mathrm{Hom}(V, W)$

I • ISOMORFISMI DI SPAZI VETTORIALI

L • CAMBIAMENTI DI BASE

M • SPAZIO DUALE: BASE DUALE, ANNULLATORE

N • PARAMETRIZZAZIONE E DESCRIZIONE CARTESIANA DI UN SOTTOSPAZIO

O • DETERMINANTI: PROPRIETÀ FONDAMENTALI.

P • FORMULA DI BINET, FORMULA DI CRAMER, SVILUPPO DI LAPLACE

LA PARTE SUL DETERMINANTE LA TROVATE IN UNA NOTA IN RETE E È SVOLTA IN MODO DIVERSO RISPETTO AL LIBRO, SPERO PIÙ CONCRETO.
TUTTO IL RESTO LO TROVATE NELLE SEZIONI 1.11 (SENZA LA PARTE SUL QUOZIENTE PAR. 7, IL COROLLARIO 11.7, IL TEOREMA 11.9 E I COMPLEMENTI) E 1.12.

NOTAZIONI

- Se $F: V \longrightarrow W$ è LINEARE E $v_1 \dots v_n$ è UNA BASE DI V E $w_1 \dots w_m$ UNA BASE DI W NOI ABBIAMO INDICATO LA MATRICE ASSOCIATA F RISPETTO A QUESTE BASI CON
$$[F]^{v_1 \dots v_n}_{w_1 \dots w_m}$$
MENTRE IL LIBRO LA INDICA CON $M_{w,v}(F)$
- Se A è UNA MATRICE $m \times n$ NOI ABBIAMO INDICATO L'APPLICAZIONE LINEARE ASSOCIATA CON
$$L_A : K^n \longrightarrow K^m$$
- IL NUCLEO LO ABBIAMO INDICATO CON $N(F)$, COME IL LIBRO, MA MOLTI LO INDICANO CON $\ker(F)$

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

ARGOMENTI

- DEFINIZIONE DI AUTOVALORE E AUTOVETTORE
- POLINOMIO CARATTERISTICO
- APPLICAZIONI DIAGONALIZZABILI E MATRICI DIAGONALIZZABILI
- AUTOSPAZI E MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA DI UN AUTOVALORE
- CRITERI PER LA DIAGONALIZZABILITÀ DI UNA APPLICAZIONE LINEARE.

PER QUESTA PARTE POTETE USARE SIA IL CAPITOLO 13 DEL LIBRO SIA IL PRIMO CAPITOLO "AUTOVETTORI E AUTOVALORI" DEGLI APPUNTI DEL SECONDO SEMESTRE (CHE SONO MOLTO VICINI ALLA TRATTAZIONE FATTA IN CLASSE)

TUTTA QUESTA PARTE VERRÀ RIPRESA E AMPLIATA NEL SECONDO SEMESTRE.

NOTAZIONI

- IO HO CHIAMATO CONIUGATE DUE MATRICI $n \times n$ A, B TALI CHE ESISTE G $n \times n$ INVERTIBILE E $A = GBG^{-1}$. ANCHE IL NOME SIMILI È DIFFUSO.

IN DEFINITIVA IL PROGRAMMA SVOLTO NEL PRIMO SEMESTRE

È CONTENUTO IN:

- IL LIBRO GEOMETRIA 1 DI SERNESI, LE SEZIONI:
  1.1
  1.2
  1.3
  1.4
  1.11 (SENZA LA PARTE SULLO SPAZIO QUOZIENTE PAR. 6 IL COROLLARIO 11.7 E IL TEOREMA 11.5 E SENZA I COMPLEMENTI)
  1.12 SENZA L'ULTIMA PARTE SUGLI SPAZI AFFINI

- LE NOTE CHE TROVATE SULLA PAGINA WEB (TUTTE)

- IL PRIMO CAPITOLO DEGLI APPUNTI DEL SECONDO SEMESTRE DEL CORSO DEL 2016-17 DI MARTELLI

SE AVETE DEGLI APPUNTI DISCRETI, LA COSA MIGLIORE PER PREPARARE IL CORSO CREDO SIA SISTEMARE GLI APPUNTI.

IN OGNI CASO IL LIBRO SECONDO ME È FATTO MOLTO BENE E IN GRAN PARTE HA UNO STILE E UNA IMPOSTAZIONE MOLTO SIMILE A QUELLA DEL CORSO. PER LE PARTI NELLE QUALI CI SIAMO DISCOSTATI DI PIÙ HO AGGIUNTO DEGLI APPUNTI SULLA PAGINA WEB.

L'ORDINE DEGLI ARGOMENTI DEL CORSO HA SEGUITO DELLE ESIGENZE DIDATTICHE. NON SEMPRE QUESTO ORDINE CORRISPONDE AL MODO PIÙ CONVENIENTE DI ORGANIZZARE LE COSE DAL PUNTO DI VISTA LOGICO. PER ESEMPIO NOI ABBIAMO PRIMA PARLATO DI MATRICI E SOLO MOLTO DOPO DI APPLICAZIONI LINEARI CHE SONO UN ARGOMENTO PIÙ ASTRATTO. TUTTAVIA ALCUNE OSSERVAZIONI CHE ABBIAMO FATTO PER LE APPLICAZIONI LINEARI SONO UTILI NELLO STUDIO DELLE MATRICI.

TUTTO CIÒ CHE ABBIAMO FATTO FA PARTE DEL PROGRAMMA. NON TUTTE LE COSE PERÒ HANNO LA STESSA IMPORTANZA E UTILITÀ. LE SEGUENTI SONO SICURAMENTE MOLTO IMPORTANTI:

- CAPIRE BENE LE DEFINIZIONI: SAPER FORMULARE UNA DEFINIZIONE SENZA ERRORI E CON IL LINGUAGGIO APPROPRIATO, SAPER FARE DEGLI ESEMPI SIGNIFICATIVI

- PRIMA ANCORA DI SAPERE LE DIMOSTRAZIONI DEI TEOREMI PIÙ COMPLICATI È IMPORTANTE SAPER DIMOSTRARE AFFERMAZIONI SEMPLICI COME QUELLE CHE A VOLTE ABBIAMO LASCIATO PER ESERCIZIO. (PER CAPIRSI IL LIVELLO DI DIFFICOLTÀ CHE HO IN MENTE È $N(F)=0$ IMPLICA F INIETTIVA, E IN GENERALE QUELLE DIMOSTRAZIONI IN CUI BASTA METTERE PER ESTESO IL SIGNIFICATO DELLE DEFINIZIONI)

- ACQUISIRE UNA BUONA MANUALITÀ NEL CALCOLO CON LE MATRICI: MOLTIPLICAZIONE, RIDUZIONE A SCALINI, CALCOLO DEL DETERMINANTE

- AVER CAPITO BENE L'ENUNCIATO DEI TEOREMI PIÙ IMPORTANTI: SAPER ESPRIMERE L'ENUNCIATO CON PRECISIONE, SAPER FARE DEGLI ESEMPI IN CUI SI APPLICA IL TEOREMA, SAPER COMMENTARE LE IPOTESI (COSA SUCCEDE SE UNA IPOTESI VIENE MENO)

- SAPER PASSARE DAL LINGUAGGIO ASTRATTO AD UNO PIÙ CONCRETO E VICEVERSA. PER ESEMPIO DAL LINGUAGGIO DELLE APPLICAZIONI LINEARI A QUELLO DELLE MATRICI.