ALCUNE CONSEGUENZE DEL TEOREMA FONDAMENTALE

IL RANGO DI UNA MATRICE

Se A è una matrice $m \times n$ nel nostro studio dei sistemi lineari abbiamo definito rango(A) come n − n° variabili libere. Abbiamo osservato che la definizione

$$\text{rango}(A) = n$$

e

$$\text{rango}(A) = m$$

e

$$\text{rango}(A) = 0$$

erano ben date ma per i casi intermedi $0 < \text{rango}(A) < n, m$ la nostra definizione poteva essere non univoca. Poniamo finalmente una toppa a questo problema.

Sia A una matrice $m \times n$ e sia $L_A : K^n \longrightarrow K^m$ l'applicazione lineare associata. Consideriamo il sistema

$$A x = 0$$

Riduciamo ora A a scalini e otteniamo la matrice B. Il sistema $A x = 0$ si trasforma nel sistema $B x = 0$ ovvero

$$N(L_A) = N(L_B).$$

In particolare

$$\dim N(L_A) = \dim N(L_B).$$

Ora sia R = n° di Pivot di B. Nel sistema $Bx = 0$ possiamo individuare come variabili libere le variabili che non corrispondono ai Pivot. quindi $n - R$ variabili libere.

Nella sezione sui sistemi lineari abbiamo mostrato che possiamo costruire una base del nucleo di una applicazione che ha un elemento per ogni variabile libera. Quindi

$$\dim N(L_B) = \text{n° var. libere} = n - R$$

mettendo insieme le due formule otteniamo

$$\boxed{\dim N(L_A) = n - R}$$

ovvero

$$R = n - \dim N(L_A)$$

e la formula alla destra non dipende dalla riduzione a scalini effettuata. In particolare il rango di una matrice è ben definito.

Si può dare un'altra formula che caratterizza intrinsecamente il rango:

$$\text{rango } A = \dim \operatorname{Im}(L_A)$$

Ne daremo due dimostrazioni, la prima più sintetica ed elegante la seconda più costruttiva.

TEOREMA DELLA DIMENSIONE E DEFINIZIONE GENERALE DI RANGO

TEOREMA DELLA DIMENSIONE

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F: V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Allora

$$\dim V = \dim N(F) + \dim \operatorname{Im} F$$

dim

Sia $v_1 \dots v_a$ una base di $N(F)$ in particolare sono lin. indip.

Possiamo completare $v_1 \dots v_a$ ad una base $v_1 \dots v_a\, u_1 \dots u_b$ di V.

Quindi $\dim V = a + b$.

Sia $w_i = F(u_i)$.

Dimostriamo che $w_1 \dots w_b$ sono una base di $\operatorname{Im} F$.

- Dimostriamo che $w_1 \dots w_b$ generano $\operatorname{Im} F$.

  Infatti se $w \in \operatorname{Im} F$ allora $w = F(v)$ per qualche $v \in V$ e

  $$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_a v_a + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_b u_b$$

  quindi $$w = F(v) = \alpha_1 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F(v_1)}} + \dots + \alpha_a \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F(v_a)}} + \beta_1 \underset{w_1}{\underset{\shortparallel}{F(u_1)}} + \dots + \beta_b \underset{w_b}{\underset{\shortparallel}{F(u_b)}}$$

  $$= \beta_1 w_1 + \dots + \beta_b w_b$$

- Dimostriamo che $w_1; \dots; w_b$ sono lin. indip.

  Sia $\beta_1 w_1 + \dots + \beta_b w_b = 0$

Allora $F(\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_b u_b) = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_b w_b = 0$

quindi $u = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_b u_b \in N(F)$ quindi esistono

$\alpha_1, \dots \alpha_a$ tali che

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_a v_a$$

ovvero

$$-\alpha_1 v_1 \cdots - \alpha_a v_a + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_b u_b = 0$$

Essendo $v_1, \dots u_b$ lin. indip. se ricaviamo che tutti i coefficienti sono zero e in particolare

$$\beta_1 = \cdots = \beta_b = 0$$

dimostrando così che $w_1, \dots w_b$ sono lin. indip.

#

COROLLARIO

Sia A una matrice $m \times n$. Allora $\text{rango}(A) = \dim \text{Im}\, L_A$

dim

Dalla definizione abbiamo $\text{rango}(A) = n -$ n° variabili libere

Dalla proposizione della sezione precedente ricaviamo

$$\text{rango}(A) = n - \dim N(L_A)$$

e dal teorema della dimensione applicato a $L_A : K^n \longrightarrow K^m$

$$\text{rango}(A) = \dim K^n - \dim N(L_A) = \dim \text{Im}\, L_A$$

#

DEFINIZIONE (definizione di rango per una applicazione lineare qualsiasi)

Sia $F: V \longrightarrow W$ lineare e sia V di dimensione finita. Allora definiamo

$$\text{rango}(F) = \dim(\text{Im}\, F)$$

Per il corollario precedente abbiamo che se $F = L_A$ $\text{rango}(F) = \text{rango}(A)$.

DESCRIZIONE DI $\mathrm{Im}\, L_A$ (o estrarre una base da dei generatori)

Diamo ora una dimostrazione più diretta del fatto che rango A è uguale a $\dim \mathrm{Im}\, L_A$, spiegando come costruire una base di $\mathrm{Im}\, L_A$ che ha esattamente rango (A) elementi.

Siano $u_1 \dots u_n$ le colonne della matrice A. Abbiamo visto che

$$\mathrm{Im}\, L_A = \langle u_1 \dots u_n \rangle .$$

Consideriamo ora il sistema $A \cdot x = 0$. Risolviamo il sistema e siano $x_{i_1} \dots x_{i_h}$ le variabili dipendenti e $x_{j_1} \dots x_{j_k}$ le variabili libere. Mostriamo che

$$u_{i_1} \dots u_{i_h} \text{ è una base di } \mathrm{Im}\, L_A$$

e in particolare perché $h = \text{rango}(A)$ ne ricaviamo un'altra volta che $\text{rango}(A) = \dim \mathrm{Im}\, L_A$.

Illustriamo la dimostrazione di $(*)$ con un esempio "quasi" numerico. Supponiamo $n = 5$ e che $h = 2$ con $i_1 = 1$ e $i_2 = 3$. quindi avremo che le soluzioni del sistema si possono descrivere con le $(x_1 \dots x_5)$:

$$\begin{cases} x_1 = a_2 x_2 + a_4 x_4 + a_5 x_5 \\ x_3 = b_2 x_2 + b_4 x_4 + b_5 x_5 \end{cases}$$

consideriamo le tre soluzioni che si ottengono con

$$x_2 = 1 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \qquad \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 0 \qquad \begin{pmatrix} a_4 \\ 0 \\ b_4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1 \qquad \begin{pmatrix} a_5 \\ 0 \\ b_5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi da $A \cdot x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_5 u_5$ ricaviamo

$$a_2 u_1 + u_2 + b_2 u_3 = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad u_2 = -a_2 u_1 - b_2 u_3$$

$$a_4 u_1 + u_4 + b_4 u_3 = 0 \qquad \text{"} \qquad u_4 = -a_4 u_1 - b_4 u_3$$

$$a_5 u_1 + u_5 + b_5 u_3 = 0 \qquad \text{"} \qquad u_5 = -a_5 u_1 - b_5 u_3$$

quindi $\quad \mathrm{Im}\, L_A = \langle u_1, u_2 \dots u_5 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle$

Rimane da dimostrare che u_1 e u_3 sono lin. indip.

Se avessimo $\quad \alpha u_1 + \beta u_3 = 0$ allora $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sarebbe

una soluzione del sistema. $A \cdot x = 0$ con $x_2 = x_4 = x_5 = 0$

ma in tal caso abbiamo che $\alpha = x_1 = 0$ e $\beta = x_3 = 0$.

LA FORMULA DI GRASSMANN

Se $U = K^a$ e $W = K^b$ allora $U \times W = K^{a+b}$ e in particolare $\dim (U \times W) = \dim U + \dim W$. Riformuliamo questa cosa in generale

LEMMA

Se U e W sono spazi vettoriali di dim. finita e $V = U \times W$ è lo spazio vettoriale in cui somma e prodotto per scalare sono definiti da

$$(u, w) + (u', w') = (u + u', w + w') \qquad \lambda \cdot (u, w) = (\lambda u, \lambda w)$$

allora
$$\dim V = \dim U + \dim W$$

dim $\quad$ Sia $u_1 \dots u_a$ una base di U e $w_1 \dots w_b$ una base di W.

Allora dimostro che $(u_1, 0) \dots (u_a, 0), (0, w_1), \dots (0, w_b)$ sono una base di $U \times W$. Infatti se $u \in U$ e $v \in W$ allora

$$(u, w) = \lambda_1 (u_1, 0) \dots + \lambda_a (u_a, 0) + \mu_1 (0, w_1) + \dots + \mu_b (0, w_b)$$
$$= (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_a u_a, \mu_1 w_1 + \dots + \mu_b w_b)$$

se e solo se

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_a u_a \qquad w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_b w_b$$

e quindi i λ_i e i μ_j esistono univocamente determinati perché $u_1 - u_a$, $w_1 - w_b$ sono basi di U e W.

#

Dimostriamo adesso una formula che mette in relazione la dimensione di due sottospazi di uno spazio vettoriale. La formula è molto simile alla formula della dimensione e infatti si può dare una dimostrazione che segue la linea di quella della formula delle dimensioni oppure dedurla dalla formula della dimensione.

TEOREMA (FORMULA DI GRASSMANN)

Sia V uno spazio vettoriale. Siano $U, W \subset V$ sottospazi di dimensione finita. Allora

$$\dim U \cap W + \dim U + W = \dim U + \dim W$$

dim

Sia $F : U \times W \longrightarrow V$ l'applicazione definita da

$$F(u, w) = u + w.$$

Si verifica facilmente che F è lineare.

$$\operatorname{Im} F = \{ u + w : u \in U, w \in W \} = U + W$$

Calcoliamo ora il nucleo

$$N(F) = \{ (u, w) : u + w = 0 \} = \{ (u, -u) : u \in U \cap W \}$$

Osserviamo che $N(F)$ è isomorfo a $U \cap W$, infatti se

$$G : U \cap W \longrightarrow N(F) \qquad G(u) = (u, -u)$$

$$H : N(F) \longrightarrow U \cap W \qquad H(u, -u) = u$$

G, H sono lineari e sono una l'inversa dell'altra. Quindi

$$\dim N(F) = \dim U \cap W$$

$$\dim \operatorname{Im}(F) = \dim U + W$$

Allora poiché $F : U \times W \to V$ applicando la formula della dimensione e il lemma precedente otteniamo

$$\dim U + \dim W = \dim U \times W = \dim U \cap W + \dim U + W$$

#

Esempio - Esercizio

Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^5$ tali che $\dim U = 3$ $\dim W = 4$ e $\dim U \cap W = 2$. Determinare $U + W$.

Dalla formula di grassmann ricaviamo $2 + \dim U + W = 3 + 4$. Ovvero

$$\dim U + W = 5$$

da cui $U + W = \mathbb{R}^5$

SOTTOSPAZI IN SOMMA DIRETTA

Studieremo ora il concetto di sottospazi in somma che sarà molto utile nel seguito e che, in qualche senso

DEFINIZIONE

Siano $U_1, U_2, \dots, U_n$ dei sottospazi di V
$U_1, \dots, U_n$ si dicono in somma diretta se

$$\dim (U_1 + U_2 + \dots + U_n) = \dim U_1 + \dots + \dim U_n \qquad (*)$$

Se $U_1 \dots U_n$ sono in somma diretta invece di scrivere $U_1 + \dots + U_n$ scriviamo $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. Quindi $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ è lo stesso sottospazio di $U_1 + \dots + U_n$ ma indica anche che vale la formula $(*)$.

Se $U_1 \dots U_n$ sono in somma diretta e V è la somma di $U_1, \dots, U_n$ diciamo che V è la somma diretta di $U_1, \dots, U_n$. In altre parole $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$

Studiamo prima il caso di due sottospazi $U_1 = U$ e $U_2 = W$, che è più semplice del caso generale. Iniziamo con un esempio.

Esempio - esercizio

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $U = \mathbb{R} u$ con $u \neq 0$ e sia $W = \{ v \in \mathbb{R}^3 : (u \cdot v) = 0 \}$
Allora $\dim U = 1$, $\dim W = 2$ e $U \cap W = 0$.
Quindi dalla formula di Grassmann $\dim U + W = 1 + 2 - 0 = 3 = \dim U + \dim W$
e $V = U \oplus W$.

LEMMA

Le seguenti condizioni sono equivalenti:
1) U, W sono in somma diretta
2) $U \cap W = 0$
3) $\forall$ $u \in U$ e $w \in W$: $u + w = 0$ allora $u = w = 0$

dim Dimostriamo $1 \Leftrightarrow 2$. Dalla formula di Grassmann

$$\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

Quindi $\dim (U + W) = \dim U + \dim W \iff \dim U \cap W = 0 \iff U \cap W = 0$

Dimostriamo $2 \Rightarrow 3$ Se $U \cap W = 0$ e $u + w = 0$ con $u \in U, w \in W$ allora $u = -w \in U \cap W \Rightarrow u = 0$ e $w = 0$

Dimostro $3 \Rightarrow 2$ se $u \in U \cap W$ e $w = -u$ allora $u + w = 0$ e $u \in U$ e $w \in W$ $\Rightarrow$ $u = w = 0$.

#

Quindi nel caso di due soli sottospazi la condizione di essere in somma diretta è equivalente a $U \cap W = 0$. Occupiamoci ora del problema di costruire dei generatori di $U + W$ e una base di $U + W$.

LEMMA

1) Siano $u_1 \dots u_a$ dei generatori di U e $w_1 \dots w_b$ dei generatori di W. Allora $u_1 \dots u_a\ w_1 \dots w_b$ sono dei generatori di $U+W$

2) Se U, W sono in somma diretta, $u_1 \dots u_a$ sono una base di U e $w_1 \dots w_b$ sono una base di W allora $u_1 \dots u_a\ w_1 \dots w_b$ sono una base di $U+W$.

dim

1) Sia $x \in U+W$ e sia $x = u+w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Allora $\exists\ \lambda_1 \dots \lambda_a, \mu_1 \dots \mu_b$ tali che

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_a u_a \qquad w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_b w_b,$$

quindi $$x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_a u_a + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_b w_b .$$

2) Per il punto 1) $u_1 \dots w_b$ generano $U+W$ e inoltre sono $a+b = \dim U+W$ quindi sono una base

#

Questo lemma si generalizza al caso di n sottospazi.

LEMMA

1) Siano
$u_1^{(1)} \dots u_{d_1}^{(1)}$ dei generatori di U_1
$u_1^{(2)} \dots u_{d_2}^{(2)}$ " " " " U_2
...
$u_1^{(n)} \dots u_{d_n}^{(n)}$ " " " U_n

Allora $u_1^{(1)} \dots u_{d_1}^{(1)}\ u_1^{(2)} \dots u_{d_n}^{(n)}$ sono dei generatori di $U_1 + \dots + U_n$.

2) Se $U_1, \dots, U_n$ sono in somma diretta e se
$u_1^{(1)} \dots u_{d_1}^{(1)}$ sono una base di U_1
$u_1^{(2)} \dots u_{d_2}^{(2)}$ " " U_2
...
$u_1^{(n)} \dots u_{d_n}^{(n)}$ " " U_n

Allora $u_1^{(1)} \dots u_{d_1}^{(1)}, u_1^{(2)} \dots u_{d_n}^{(n)}$ sono una base di $U_1 + U_2 + \dots + U_n$.

Lasciamo la dimostrazione di questo lemma per esercizio. La prima parte si ottiene dal lemma precedente per induzione. La seconda parte si dimostra in modo identico a quanto fatto nel lemma precedente.

Non tutti i risultati si generalizzano in modo così diretto. Iniziamo con un esempio che mette in guardia da un errore molto frequente.

Esempio   Sia $V = \mathbb{R}^2$

Sia $U_1 = \mathbb{R} e_1$ $U_2 = \mathbb{R} e_2$ $U_3 = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$. Allora $U_i \cap U_j = 0 \quad \forall i \neq j$
ma $\dim (U_1 + U_2 + U_3) \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2 \neq 1 + 1 + 1$

Generalizziamo ora i risultati ottenuti nel caso di due sottospazi

LEMMA 1) Se $U_1 \dots U_n$ sono sottospazi di V allora
$\dim (U_1 + \dots + U_n) \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_n$

2) Se $U_1 \dots U_n$ sono in somma diretta allora $U_1 \dots U_m$ con $m < n$ sono in somma diretta.

dim. 1) p.i. su n
$n = 1$ è ovvio
$n \Rightarrow n+1$ Sia $U = U_1 + \dots + U_n$ e $W = U_{n+1}$ allora da Grassm.

$$\dim (U_1 + \dots + U_n + U_{n+1}) = \dim U + W = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W) \leq$$
$$\leq \dim (U_1 + \dots + U_n) + \dim U_{n+1}$$

p. ipot. induttiva $\leq \dim U_1 + \dots + \dim U_n + \dim U_{n+1}$

2) Sia $U = U_1 + \dots + U_m$ e $W = U_{m+1} + \dots + U_n$. Allora per la formula di Grassmann

$$\dim U_1 + \dots + \dim U_n \overset{\text{PER IPOTESI } U_i \text{ in somma diretta}}{=} \dim (U_1 + \dots + U_n) = \dim (U + W) \overset{\text{Grassmann}}{=} \dim U + \dim W - \dim U \cap W \leq$$
$$\leq \dim U + \dim W \underset{\text{per il punto 1}}{\leq} (\dim U_1 + \dots + \dim U_m) + (\dim U_{m+1} + \dots + \dim U_n)$$

Poiché il 1° termine e l'ultimo sono uguali tutte le disuguaglianze sono uguaglianze e in particolare

$$\dim (U_1 + \dots + U_m) = \dim U_1 + \dots + \dim U_m$$

#

PROPOSIZIONE

Siano $U_1 \dots U_n$ dei sottospazi di dim finita di V. Allora sono equivalenti

1) $U_1 \dots U_n$ sono in somma diretta
2) $U_a \cap (U_1 + \dots + U_{a-1}) = 0$ per $a = 2 \dots n$
3) Se $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$ e $u_1 + \dots + u_n = 0$ allora $u_1 = \dots = u_n = 0$

dim Per $i = 1 \dots n$ sia $W_i = U_1 + \dots + U_i$.

Se vale 1) allora $U_1 \dots U_{a-1}$, e $U_1 \dots U_a$ sono in somma diretta per quanto visto nel lemma. Quindi

$$\dim W_{a-1} = \sum_{i=1}^{a-1} \dim U_i \qquad \dim W_a = \sum_{i=1}^{a} \dim U_i$$

e $W_a = W_{a-1} + U_a = \dim W_{a-1} + \dim U_a$, quindi W_{a-1} e U_a sono in somma diretta da cui $W_{a-1} \cap U_a = 0$. Quindi abbiamo dimostrato $1) \Rightarrow 2)$.

Supponiamo ora che valga 2). Allora per quanto visto nel caso di due sottospazi W_{a-1} e U_a sono in somma diretta quindi posto $W_a = W_{a-1} + U_a$

$$\dim W_a = \dim (W_{a-1} + U_a) = \dim W_{a-1} + \dim U_a \qquad \text{per } a = 2 \dots n$$

$$\dim W_1 = \dim U_1$$

e per induzione ricaviamo $\dim W_a = \dim U_1 + \dots + \dim U_a$ per $a = 2 \dots n$ e in particolare

$$\dim (U_1 + \dots + U_n) = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$$

e quindi sono in somma diretta. Questo dimostra $2) \Rightarrow 1)$.
Ora dimostriamo che $2) \Rightarrow 3)$. Siano $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$ tali che $u_1 + \dots + u_n = 0$.
Allora se $w = u_1 + \dots + u_{n-1}$ e $u = u_n$ si ha $w + u = 0$ $w \in W_{n-1}$, $u \in U_n$ e $W_{n-1} \cap U_n = 0$. Per quanto visto nel caso di due sottospazi $w = 0$ e $u = 0$.
Quindi $u_n = 0$ e $u_1 + \dots + u_{n-1} = 0$. Di nuovo, procedimento per induzione, ricaviamo $u_1 = \dots = u_{n-1} = u_n = 0$.

Dimostriamo infine che $3) \Rightarrow 2)$. Dalla condizione del punto 3) ricaviamo che se $w = u_1 + \dots + u_{a-1} \in W_{a-1}$ e $u = u_a \in W_a$ e $w + u = 0$. Allora

$w = u = 0$. Quindi per quanto visto nel caso di due sottospazi $W_{a-1} \cap U_a = 0$ #

IL RANGO DELLA COMPOSIZIONE, IL RANGO DELLA TRASPOSTA

Chiudiamo con lo svolgimento di alcuni esercizi che hanno anche un interesse teorico.

Esercizio Siano U, V, W tre sp. vettoriali di dim. finita.
Sia $F : U \longrightarrow V$, $G : V \longrightarrow W$ app. lineari

1) Se F è surgettiva allora
$$\text{rango } G = \text{rango} (G \circ F)$$

2) Se G è iniettiva allora
$$\text{rango } F = \text{rango}(G \circ F)$$

dim

1) Calcoliamo $\operatorname{Im} G$. Abbiamo
$$\operatorname{Im} G = G(V) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } F(U)=V}}{=} G(F(U)) = \operatorname{Im} G \circ F$$
da cui la tesi.

2) Sia $I = \operatorname{Im} F = F(U)$ quindi rango $F = \dim I$ e
rango $G \circ F = \dim \operatorname{Im} G \circ F = \dim G(F(U)) = \dim G(I)$.
La tesi segue quindi se dimostriamo che $\dim I = \dim G(I)$.
Sia $H : I \longrightarrow W$ la restrizione di G a I ovvero sia
$H(x) = G(x)$ per ogni $x \in I$. In particolare $G(I) = H(I)$.
Poiché G è iniettiva abbiamo che $N(H) \subset N(G) = 0$ quindi
dalla formula della dimensione segue
$$\dim I = \dim N(H) + \dim \operatorname{Im} H = \dim \operatorname{Im} H = \dim H(I) = \dim G(I)$$
come volevamo #

Il risultato di questo esercizio ha una implicazione immediata:

- Se B è una matrice $m \times n$, e A è una matrice $m \times m$ invertibile e C una matrice $n \times n$ invertibile allora
$$\text{rango } B = \text{rango } AB = \text{rango } BC = \text{rango } ABC$$

Esercizio

Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare tra due spazi vettoriali di dim finita
Allora esiste una base $v_1 \dots v_n$ di V e una base $w_1 \dots w_m$ di W tali che
$$[F]^{\underline{v}}_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dim Questo esercizio fornisce una versione "matriciale" della dimostrazione del teorema della dimensione. Seguiamo i passi di quella dimostrazione.

Scegliamo una base del nucleo di F: $u_1 \dots u_t$.

Completiamo questa base ad una base di V (i vettori nuovi però li mettiamo prima)
$$v_1 \dots v_k\, u_1 \dots u_t \quad \text{che sarà la base } \underline{v} \text{ cercata.}$$

Consideriamo $w_1 = F(v_1) \dots w_k = F(v_k)$. Nella dimostrazione del teorema della dimensione abbiamo visto che sono lin. indip.

Completiamo $w_1 \dots w_k$ ad una base $w_1 \dots w_m$ di W. Allora

$$[F]^{\underline{v}}_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$ ha la forma cercata #

Esercizio

Sia A una matrice $m \times n$. Dimostrare che rango A = rango A^t

dim

Consideriamo $L_A : K^n \longrightarrow K^m$. Per quanto visto nell'esercizio precedente esiste una base $v_1 \dots v_n$ di K^n e una $w_1 \dots w_m$ di K^m tali che

$$B = [L_A]^{\underline{v}}_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Il legame tra B ed A è dato dal cambiamento di base

$$B = [L_A]^{v}_{w} = [Id]^{\underline{e}}_{\underline{w}} \ [L_A]^{\underline{e}}_{\underline{e}} \ [Id]^{\underline{v}}_{\underline{e}}$$

Se pongo $G = [Id]^{e}_{\underline{w}}$ e $H = [Id]^{\underline{v}}_{e}$ abbiamo quindi

$$B = G A H$$

e G, H sono invertibili. Calcolando la trasposta abbiamo

$$B^t = H^t A^t G^t$$

e H^t, G^t sono invertibili. Quindi

$$\text{rango } B = \text{rango } A \quad \text{e} \quad \text{rango } B^t = \text{rango } A^t.$$

Infine rango B = rango B^t perché sono già a scalini e hanno lo stesso numero di pivot. #