

IL TEOREMA FONDAMENTALE

Chiamo teorema fondamentale dell'algebra lineare il teorema che afferma che tutte le basi hanno la stessa cardinalità. Non è un nome convenzionale, non lo troverete enunciato allo stesso modo in un libro, è un nome però meritato. La dimostrazione di questo teorema che abbiamo dato a lezione e che trovate qui sotto, non è molto bella, ma spero sia più "concreta" e quindi più adatta a questo corso. Dimosteremo il teorema prima nel caso di K^m e poi per un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita.

IL CASO DI K^m

La dimostrazione del teorema fondamentale nel caso di K^m usa due fatti che abbiamo osservato parlando di sistemi lineari.

Sia A una matrice $m \times n$. Allora

- ① Il sistema $Ax = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$ se e solo se $\text{rang}(A) = n$.
- ② Il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in K^m$ se e solo se $\text{rang}(A) = m$.

Osserviamo che in ogni caso $\text{rang} A \leq n$ e $\text{rang} A \leq m$ quindi la condizione $\text{rang} A = n$ è equivalente alla condizione $\text{rang} A \geq n$. Similmente la condizione $\text{rang} A = m$ è equivalente a $\text{rang} A \geq m$.

Siano ora $v_1, \dots, v_n \in K^n$, che pensiamo come vettori colonne e sia

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

la matrice $m \times n$ le cui colonne sono i vettori v_1, \dots, v_n .

LETTA

- Ⓐ v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti se e solo se $\text{rang}(A) = n$
- Ⓑ v_1, \dots, v_n generano K^n se e solo se $\text{rang}(A) = m$

dim. La dimostrazione sia di Ⓐ che di Ⓑ si basa sui due fatti richiamati in precedenza e sull'osservazione di:

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dimostriamo ②. v_1, \dots, v_n linearmente indipendenti vuol dire che se $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$ allora $x_1 = \dots = x_n = 0$ ovvero che

$$A x = 0$$

ha come unica soluzione $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e per il punto ① ricordato sopra questo vuol dire $\text{rang}(A) = n$

Dimostriamo ③. v_1, \dots, v_n generatori di K^m vuol dire che $\forall b \in K^m \exists x_1, \dots, x_n$ tali che $b = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ ovvero che il sistema

$$A x = b$$

ha soluzione per ogni $b \in K^m$ e per il punto ② ricordato sopra questo vuol dire $\text{rang}(A) = m$.

#

TEOREMA FONDAMENTALE PER K^m

Siano $v_1, \dots, v_n \in K^m$

① Se v_1, \dots, v_n sono una base allora $n = m$

② Se v_1, \dots, v_n sono lin. indep. allora $n \leq m$

③ Se v_1, \dots, v_n sono generatori di K^m allora $n \geq m$

④ Se $n = m$ allora v_1, \dots, v_m sono una

base e solo se sono linearmente indipendenti e se

e solo se sono generatori di K^m

dim. Sia $A = (v_1, \dots, v_n)$ la matrice $m \times n$ introdotta in precedenza. Usando il lemma precedente abbiamo

① Se v_1, \dots, v_n lin. indep. allora $n = \text{rang}(A)$.
In ogni caso $\text{rang}(A) \leq m$ quindi $n \leq m$.

② Se v_1, \dots, v_n generatori allora $m = \text{rang}(A)$
In ogni caso $\text{rang}(A) \leq n$ quindi $m \leq n$.

③ Se v_1, \dots, v_n base allora sono generatori e linearmente indipendenti, quindi da ② otteniamo $n \leq m$ e da ③ otteniamo $m \leq n$. Quindi $n = m$.

④ Se $n = m$ allora osserviamo che le condizioni v_1, \dots, v_m lin. indep. e solo se $\text{rang}(A) = m$

v_1, \dots, v_m generano K^m se e solo se $\text{rank}(A) = m$

sono equivalenti. Ne ricaviamo che v_1, \dots, v_m generano K^m se e solo se sono lin. indipendenti.

In particolare le tre condizioni

- essere una base
- essere generatori di K^m
- essere lin. indep.

sono equivalenti in questo caso

#

AGGIUNGERE VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI E ELIMINARE GENERATORI

Studieremo se vettori linearmente indipendenti, generatori e basi nel caso di uno spazio vettoriale generale.

Iniziamo con due osservazioni, la prima delle quali spiega come aggiungere un vettore ad una lista di vettori linearmente indipendenti.

Queste osservazioni possono essere utili, in alcuni casi, a costruire basi di uno spazio vettoriale.

LEMA

Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_b \in V$ alcuni vettori linearmente indipendenti. Sia $v \in V$.

Allora v_1, \dots, v_b, v sono lin. indep. se e solo se $v \notin \langle v_1, \dots, v_b \rangle$.

Dimostrazione Dimostriamo che v_1, \dots, v_b, v sono lin. dipendenti se e solo se $v \in \langle v_1, \dots, v_b \rangle$. Supponiamo che $v \in \langle v_1, \dots, v_b \rangle$, allora $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_b \in K$ tali che

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_b v_b$$

ovvero

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_b v_b - 1 \cdot v = 0,$$

In particolare questa è una combinazione lineare che ha almeno il coeff. di v diverso da zero e che è uguale a zero. Quindi v_1, \dots, v_b, v sono lin. dip.

Viceversa supponiamo che v_1, \dots, v_b, v siano lin. dip. Allora

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_b, \beta$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_b v_b + \beta v = 0 \quad \text{ovvero} \quad \beta v = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_b v_b$$

Se fosse $\beta = 0$ allora avremmo una combinazione lineare che annulla v_1, \dots, v_b che sono lin. indep. per ipotesi quindi avremmo $\alpha_1 = \dots = \alpha_b = 0$ contro il fatto che almeno uno tra gli α_i e β è non nullo.

Quindi $\beta \neq 0$. Dividendo per β la seconda formula ricaviamo

$$v = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \dots - \frac{\alpha_b}{\beta} v_b$$

e quindi $v \in \langle v_1, \dots, v_b \rangle$

#

Questo lemma ha le seguenti conseguenze immediate

COROLLARIO

Se $v_1, \dots, v_b \in V$ sono un insieme di vettori lin. indipendenti massimale (cioè non posso aggiungere a questa lista un altro vettore v in modo che v_1, \dots, v_b, v siano lin. indep.) allora $\langle v_1, \dots, v_b \rangle = V$ e quindi v_1, \dots, v_b sono una base di V .

OSSERVAZIONE

Inoltre il lemma fornisce un modo per costruire una lista di vettori lin. indep.: Si parte da $v_1 \in V$ con $v_1 \neq 0$.

- Se $\langle v_1 \rangle \neq V$ scelgo $v_2 \in V - \langle v_1 \rangle$ e il lemma assicura che v_1, v_2 sono lin. indep.
- Se $\langle v_1, v_2 \rangle \neq V$ scelgo $v_3 \in V - \langle v_1, v_2 \rangle$ e il lemma assicura che v_1, v_2, v_3 sono lin. indep.

e continuo così. Il processo termina solo se ad un certo punto $\langle v_1, \dots, v_b \rangle = V$. In quel caso v_1, \dots, v_b sono una base.

Esempio - esercizio.

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia W il piano $x + y + z = 0$.
Costruire una base v_1, v_2, v_3 di \mathbb{R}^3 tale che v_1, v_2 è una base di W .

Se riscriviamo l'equazione che definisce W nella forma
$$x = -y - z$$

reppoco che possiamo trovare una base di W prendendo $y=1, z=0$ e in seguito $y=0, z=1$. Otteniamo quindi

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{è una base di } W.$$

Scegliamo ora $v_3 \notin W$, per esempio $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Allora v_1, v_2, v_3 sono lin. indep e per quanto osservato nel teorema fondamentale per K^m sono una base di \mathbb{R}^3 .

Forniamo un risultato del tutto simmetrico nel caso di generatori di uno spazio vettoriale

LEMMA

Siano v_1, \dots, v_b dei generatori dello spazio vettoriale V , allora possiamo eliminarne uno (cioè $\exists i$ tale che i vettori $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_b$ sono generatori) se e solo se v_1, \dots, v_b sono lin. dip.

dimostrazione

Supponiamo di poter eliminare un vettore. Per semplicità di notazione supponiamo sia l'ultimo. Quindi

$V = \langle v_1, \dots, v_{b-1} \rangle$ e $v_b \in \langle v_1, \dots, v_{b-1} \rangle$. Allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_{b-1}$ tali che

$$v_b = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{b-1} v_{b-1}$$

da cui

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{b-1} v_{b-1} - 1 \cdot v_b = 0$$

e quindi v_1, \dots, v_b sono lin. dip.

Viceversa supponiamo che v_1, \dots, v_b siano lin. dip.

Allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_b$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_b v_b = 0.$$

Sappiamo che esiste $\lambda_i \neq 0$, sempre per semplicità di notazione che sia $\lambda_b \neq 0$. Quindi otteniamo

$$v_b = -\frac{\lambda_1}{\lambda_b} v_1 - \dots - \frac{\lambda_{b-1}}{\lambda_b} v_{b-1} \in \langle v_1, \dots, v_{b-1} \rangle = W$$

Quindi $v_1, \dots, v_b \in W$ e $\langle v_1, \dots, v_b \rangle$ è il più piccolo sottospazio che contiene v_1, \dots, v_b , quindi

$$V = \langle v_1, \dots, v_b \rangle \subset W \subset V$$

Possiamo allora eliminare v_b infatti:

$$V = W = \langle v_1, \dots, v_{b-1} \rangle \quad \#$$

Una conseguenza immediata del lemma è il seguente corollario.

COROLLARIO

Se v_1, \dots, v_b sono un insieme minimale di generatori di V (cioè se non possiamo eliminare un elemento v_i dalle liste in modo che $v_1, \dots, \check{v}_i, \dots, v_b$ non generatori di V) allora sono lin. indep.

OSSERVAZIONE (estrazione di una base da un insieme di generatori)

Il lemma precedente fornisce un modo di estrarre una base da un insieme di generatori.

Siano v_1, \dots, v_b dei generatori di V .

- Se sono lin. indep. allora sono una base.
- Se sono lin. indep. allora se possiamo eliminare uno e quindi abbiamo che $v_1, \dots, v_i, \dots, v_b$ sono generatori.

A questo punto ricapitoliamo lo stesso ragionamento.

IL TEOREMA FONDAMENTALE NEL CASO GENERALE

Dimostriamo ora il teorema fondamentale per spazi vettoriali di dimensione finita.

DEFINIZIONE Uno spazio vettoriale si dice di dimensione finita se esistono $v_1, \dots, v_n \in V$ che generano V .

L'ultima osservazione fatta implica che se V ha dimensione finita allora ha una base, infatti se v_1, \dots, v_n è un insieme di generatori di V allora se possiamo estrarre una base. Quindi gli spazi vettoriali di dimensione finita sono esattamente gli spazi vettoriali che hanno una base.

OSSERVAZIONE. Nella nostra definizione di base è sottointeso finita, c'è un concetto più generale di base, che nel corso non è stato introdotto, per trattare anche il caso di dimensione infinita.

Dimostriamo ora per questi spazi vettoriali un analogo del teorema che abbiamo dimostrato per K^m . Il teorema seguirà da ciò che abbiamo dimostrato per K^m e dal seguente lemma.

LEMMA Sia $F: V \rightarrow W$ una applicazione lineare tra spazi vettoriali.

- Se F è iniettiva e v_1, \dots, v_n sono lin. indipendenti allora $F(v_1), \dots, F(v_n)$ sono lin. indep.
- Se F è surgettiva e v_1, \dots, v_n sono generatori di V allora $F(v_1), \dots, F(v_n)$ sono generatori di W .
- Se F è iniettiva e surgettiva e v_1, \dots, v_n è una base allora $F(v_1), \dots, F(v_n)$ è una base.

dim
(a) Dobbiamo dimostrare che se

$$a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n) = 0$$

allora $a_1 = \dots = a_n = 0$. Osserviamo che

$$a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n) = F(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$$

quindi dall'iniettività di F segue che se

$$a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n) = 0$$

allora $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ e dalle linee indipendenti di v_1, \dots, v_n segue che $a_1 = \dots = a_n = 0$.

(b) Sia $w \in W$, voglio dimostrare che $\exists b_1, \dots, b_n$ tali che
 $w = b_1 F(v_1) + \dots + b_n F(v_n)$.

Dalla surgettività di F segue che $\exists v \in V$ e $F(v) = w$.
 Dal fatto che v_1, \dots, v_n generano V $\exists b_1, \dots, b_n$ e

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

e dalle linearità di F segue che

$$w = F(v) = b_1 F(v_1) + \dots + b_n F(v_n)$$

(c) Punto punto segue da (a) e da (b) #

TEOREMA (TEOREMA FONDAMENTALE IN DIMENSIONE FINITA)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia u_1, \dots, u_m una base di V . Siano $v_1, \dots, v_n \in V$

- (a) Se v_1, \dots, v_n sono una base di V allora $n = m$
- (b) Se v_1, \dots, v_n sono lin. indep. allora $n \leq m$
- (c) Se v_1, \dots, v_n generano V allora $m \leq n$
- (d) Se $n = m$ allora v_1, \dots, v_m sono una base di V se e solo se sono lin. indep. se e solo se sono generatori di V

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \text{Sia } F: V &\longrightarrow K^m & F(v) &= [v]_{\underline{u}} \text{ e vice} \\ G: K^m &\longrightarrow V & G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} &= x_1 u_1 + \dots + x_m u_m \end{aligned}$$

Come abbiamo già osservato altre volte F e G sono una l'inversa dell'altra e quindi sono bigettive.

Dimostriamo (a). Se v_1, \dots, v_n sono una base allora per il lemma $F(v_1), \dots, F(v_n)$ sono una base di K^m e per il teorema dimostrato per K^m ricerchiamo $n = m$.

La dimostrazione di ⑥ e ⑦ è del tutto analoga

Dimostriamo ④. Supponiamo v_1, \dots, v_m lin. indep.
Per il lemma $F(v_1), \dots, F(v_m)$ sono lin. indep. in K^m .
Quindi per quanto dimostrato nel caso di K^m $F(v_1), \dots, F(v_m)$
sono una base di K^m . Allora, sempre per il lemma
 $v_1 = G(F(v_1)), \dots, v_m = G(F(v_m))$
sono una base di V

Similmente dimostriamo che se v_1, \dots, v_m sono gen. di V allora
sono una base di V #

DEFINIZIONE

Sia V un K -spazio vettoriale di dimensione finita e sia
 v_1, \dots, v_m una base di V allora diciamo che la
dimensione di V è m e scriviamo

$$\dim V = m$$

Per il teorema precedente questo numero non dipende dalla base scelta.

ESEMPI

- ① $\dim K^m = m$ infatti e_1, \dots, e_m è una base di K^m
- ② $\dim \text{Mat}_{m \times n}(K) = m \cdot n$ infatti E_{ij} con
 $i=1, \dots, m \quad j=1, \dots, n$ è una base di $\text{Mat}_{m \times n}(K)$
- ③ $\dim K[t]_{\leq n} = n+1$ infatti
 $1, t, t^2, \dots, t^{n+1}$ è una base di $K[t]_{\leq n}$

Una proprietà importante degli spazi vettoriali di dimensione finita, che è intuitiva ma che non è immediatamente chiara dalla definizione è che un sottospazio di uno spazio di dimensione finita ha a sua volta dimensione finita.

TEOREMA

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita
e sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale.
Allora W ha dimensione finita e $\dim W \leq \dim V$.
Inoltre $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$

dim Se $W=0$ è ovvio. Se $W \neq 0$.

Dimostriamo prima che $\dim W$ è finita.

Procediamo p.e. supponiamo che W non sia di

dimensione finita. Allora costruisco una successione di vettori

$$v_1, v_2, \dots, v_n, \dots \in W$$

linearmente indipendenti. La successione la costruisco in questo modo:

$$v_1 \in W \text{ e } v_1 \neq 0$$

una volta costruiti v_1, \dots, v_{n-1} osservo che posso per ipotesi annullare W non ha dimensione finita allora $W \neq \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ quindi

$\exists v_n \in W \setminus \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$. Per questo osservato in una lezione precedente v_1, \dots, v_n sono lin. indipendenti

In particolare se $n = \dim V$ allora ho costruito $v_1, \dots, v_m \in V$ linearmente indipendenti che è contro il teorema fondamentale, punto ⑤.

Quindi W ha dimensione finita e sia v_1, \dots, v_n una base di W . Allora v_1, \dots, v_n sono vettori linearmente indipendenti di V e quindi sempre per il teorema fond., punto ⑥ riceviamo $n \leq m$ ovvero $\dim W \leq \dim V$.

Se infine $n = m$ allora v_1, \dots, v_m sono vettori lin. indep. di V e quindi per il punto ⑤ sono una base di V . Quindi

$$W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V.$$

#

L'ultimo risultato che vogliamo dimostrare e di cui faremo spesso uso nel seguito è un analogo del lemma che abbiamo dimostrato sopra che dice che da un insieme di generatori si può estrarre una base. Dimostriamo che un insieme di vettori linearmente indipendenti si può completare ad una base. La dimostrazione è molto simile a quella del teorema appena enunciato.

LEMMA (ogni lista di vettori lin. indep. si può completare ad una base)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $\dim V = m$.

Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ dei vettori linearmente indipendenti. Allora

esistono $v_{n+1}, \dots, v_m \in V$ tali che v_1, \dots, v_m è una base.

dim. L'idea della dimostrazione è la stessa del teorema precedente. Se $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$ abbiamo finito altrimenti aggiungiamo un elemento in $V \setminus \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, grazie al teorema fondamentale questo procedimento termina. Ne riassumiamo l'esposizione in modo diverso.

Osserviamo che per il teorema fondamentale (b), $l = m - n \geq 0$ e procediamo p.c. su l .

Se $l = 0$ $n = m$ segue dal teorema fondamentale (d)

$l - 1 \Rightarrow l$ per $l \geq 1$ $n = m - l < m$ ^{quindi:} $V \langle v_1, \dots, v_n \rangle \neq V$ altrimenti V ha una base con $n < m$ elementi. Sia allora $v_{n+1} \in V - \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Allora v_1, \dots, v_{n+1} sono linearmente indipendenti e

$$m - (n+1) = l - 1.$$

Allora per ipotesi induttive esistono $v_{n+2}; \dots; v_m$ tali che

$v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_m$ è una base

#