DETERMINANTE

QUESTE NOTE SUL DETERMINANTE SONO DIVISE IN CINQUE SEZIONI. LE PRIME QUATTRO SEZIONI RACCOLGONO GLI ARGOMENTI FATTI IN CLASSE. L'ORDINE PUÒ ESSERE LEGGERMENTE CAMBIATO, MA IL MATERIALE È LO STESSO:

- DEFINIZIONE DEL DETERMINANTE MEDIANTE LE SUE PROPRIETÀ.
- DETERMINANTE DI UN PRODOTTO, DETERMINANTE DELL'INVERSA E DETERMINANTE DI $F: V \to V$ LINEARE
- SVILUPPO DI LAPLACE, DETERMINANTE DI UNA MATRICE A BLOCCHI
- FORMULA DI CRAMER E CALCOLO DELL'INVERSA.

VI È INOLTRE UNA QUINTA SEZIONE, CHE NON FA PARTE DEL PROGRAMMA NELLA QUALE SI DIMOSTRA IL TEOREMA INIZIALE DATO PER BUONO A LEZIONE.

DEFINIZIONE DEL DETERMINANTE MEDIANTE LE SUE PROPRIETÀ

Vogliamo costruire una funzione

$$F : Mat_{n \times n}(K) \longrightarrow K$$

tale che $F(A) \neq 0$ esattamente quando A è invertibile. Come vedremo nel seguito tale funzione ha molte applicazioni

Esempio $n = 2$.

Per $n = 2$ abbiamo già incontrato una funzione con queste proprietà nell'esercizio . Infatti sì

$$F \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

allora abbiamo visto che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile se solo se $ad - bc \neq 0$.

Il seguente teorema è alla base della definizione del determinante

TEOREMA 1

Esiste un'unica funzione $F : Mat_{n \times n}(K) \longrightarrow K$ con queste proprietà:

1. $F(Id_n) = 1$
2. Se M ha due righe uguali allora $F(M) = 0$
3. F è lineare sulle righe ovvero se scriviamo le matrici come seq. di righe allora

$$F \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_i + N_i \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} M_1 \\ M_i \\ M_n \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} M_1 \\ N_i \\ M_n \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} M_1 \\ \alpha M_i \\ M_n \end{pmatrix} = \alpha\, F\begin{pmatrix} M_1 \\ M_i \\ M_n \end{pmatrix}$$

DOVE $M_1, \dots M_n, N_i$ SONO RIGHE $1 \times n$, $\alpha \in K$
E $i = 1 \dots n$.

INOLTRE LA FUNZIONE COSÌ COSTRUITA HA LA SEGUENTE PROPRIETÀ

$$④ \quad F(M^t) = F(M)$$

COMMENTI

- QUESTO TEOREMA LO ABBIAMO PRESO PER BUONO NEL CORSO, UNA DIMOSTRAZIONE LA TROVATE IN FONDO A QUESTE NOTE, MA NON VERRÀ CHIESTA ALL'ESAME.

  A LEZIONE ABBIAMO VISTO COME UNA FUNZIONE CON LE PROPRIETÀ ① ② ③ SI POSSA CALCOLARE E ABBIAMO RICAVATO DELLE FORMULE PER CALCOLARLA. QUESTO IN PARTICOLARE L'UNICITÀ DI UNA FUNZIONE CON QUESTE PROPRIETÀ, MA NON ABBIAMO MAI DIMOSTRATO CHE UNA TALE FUNZIONE ESISTA, E NEMMENO CHE VALGA LA PROPRIETÀ ④.

- LE PROPRIETÀ ①, ②, ④ SPERO SIANO CHIARE, AGGIUNGO UN ESEMPIO PER LA PROPRIETÀ ③

$$F\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1+2 & 2+3 & 3+1 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot F\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE

LA FUNZIONE $F: Mat_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ CHE HA LE PROPRIETÀ ELENCATE NEL TEOREMA SI CHIAMA DETERMINANTE E SI INDICA CON

$$\mathrm{Det} \quad \text{o con} \quad \mathrm{Det}_n$$

SE CI VOGLIAMO RICORDARE CHE STIAMO PARLANDO DI MATRICI $n \times n$.

NEL PROSSIMO LEMMA RICAVIAMO COME SI COMPORTA IL DETERMINANTE RISPETTO ALLE TRASFORMAZIONI

$R_i(\alpha)$: moltiplicare la riga i-esima per $\alpha \neq 0$

R_{ij} : scambiare la riga i e la riga j

$R_{ij}(\alpha)$: sommare alla riga i la riga j moltiplicata per α.

LEMMA 2

a) $R_i(\alpha)$: il determinante viene moltiplicato per α

ovvero

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ \alpha M_i \\ M_n \end{pmatrix} = \alpha \, \mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ \\ M_n \end{pmatrix}$$

b) R_{ij} : il determinante cambia di segno

ovvero

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_i \\ M_j \\ M_n \end{pmatrix} = - \mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_j \\ M_i \\ M_n \end{pmatrix}$$

c) $R_{ij}(\alpha)$: il determinante non cambia

ovvero
$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_i + \alpha M_j \\ M_j \\ M_n \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_i \\ M_j \\ M_n \end{pmatrix}$$

dim

IL PUNTO a) È LA PROPRIETÀ 3

b) Consideriamo la matrice

$$\begin{array}{cc} M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_i + M_j \\ \vdots \\ M_i + M_j \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{riga } i \\ \\ \leftarrow \text{riga } j \end{array} \end{array}$$

PER LA 2 È $\mathrm{Det}\, M = 0$.

USANDO LA 3 otteniamo

$$0 = \mathrm{Det}\, M = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_i \\ M_i + M_j \\ M_n \end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_j \\ M_i + M_j \\ M_n \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_i \\ M_i \\ M_n \end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_i \\ M_j \\ M_n \end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_j \\ M_i \\ M_n \end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_j \\ M_j \\ M_n \end{pmatrix}$$

IL PRIMO E IL QUARTO ADDENDO SONO ZERO PER LA PROPRIETÀ 2. QUINDI OTTENIAMO :

$$0 = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_i \\ M_j \\ M_n \end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_j \\ M_i \\ M_n \end{pmatrix}$$

DA CUI b) SEGUE.

c) PER LA PROPRIETÀ ③ ABBIAMO

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_i + \alpha m_j \\ m_j \\ m_n \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_i \\ m_j \\ m_n \end{pmatrix} + \alpha\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} m_j \\ m_j \\ m_j \\ m_n \end{pmatrix}$$

E PER LA PROPRIETÀ ② L'ULTIMO ADDENDO È ZERO DA CUI c) SEGUE.

#

ESEMPIO

IL LEMMA CI FORNISCE UN PRIMO MODO DI CALCOLARE IL DETERMINANTE CHE ILLUSTRIAMO CON UN ESEMPIO. VOGLIAMO CALCOLARE IL DETERMINANTE DI

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

RIDUCIAMO A SCALINI. SULLA DESTRA SEGNO L'OPERAZIONE CHE FACCIO E COME CAMBIA IL DETERMINANTE

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Big\downarrow R_{12}$ $\qquad\cdot -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Big\downarrow R_{31}(1)$ $\qquad =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Big| R_{41}(-2)$ $\qquad =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; R_{34}\left(-\frac{5}{4}\right) \text{ e } R_{14}\left(\frac{1}{4}\right) \qquad =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; R_{23}(-1) \text{ e } R_{13}\left(-\frac{1}{3}\right) \qquad =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; R_{12}\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad =$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Det} M \overset{3}{=} -\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{3}{=} -2 \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3}{=} -6 \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{3}{=} -24 \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{1}{=} -24$$

#

LEMMA 3 Sia M una matrice $n \times n$

a) Se M ha una riga uguale a zero allora $\operatorname{Det} M = 0$

b) Sia N una riduzione a scalini di M allora

$$\operatorname{Det}(N) = \lambda \operatorname{Det}(M) \quad \text{con } \lambda \neq 0$$

c)

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_n$$

DIM

a) Supponiamo la riga i-esima sia $0 = 0_{K^n}$

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ 0_{K^n} \\ M_n \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \cdot 0_{K^n} \\ M_n \end{pmatrix} = 0 \cdot \operatorname{Det}\begin{pmatrix} M_1 \\ 0_{K^n} \\ M_n \end{pmatrix} = 0 .$$

b) Questo segue dal fatto che le operazioni

$$R_{ij} \qquad R_{ij}(\alpha) \quad e \quad R_i(\alpha) \text{ con } \alpha \neq 0$$

con le quali si effettua la riduzione a scalini cambiano il determinante per un numero diverso da zero.

c) Facciamo prima il caso in cui $\alpha_1, \dots, \alpha_n \neq 0$.

Allora applicando operazioni del tipo $R_{ij}(\alpha)$, che non cambiano il determinante, possiamo cancellare le entrate sopra la diagonale (si riprenda l'esempio precedente se questa cosa non è chiara!) quindi

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

e ora usando la proprietà 3 otteniamo

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ \dots \ \cdot \alpha_n \, \mathrm{Det}(I_n) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ \dots \ \cdot \alpha_n .$$

Supponiamo ora che $\alpha_i = 0$ per qualche i e dimostriamo che il determinante è zero.

Se $\alpha_n = 0$, l'ultima riga è zero e segue da e)

Se $\alpha_n \neq 0$ sia $\alpha_m = 0$ l'ultimo elemento sulla diagonale uguale a zero. Cioè siano

$\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots \alpha_n$ diversi da zero

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \alpha_{m+1} & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ALLORA OPERANDO CON DELLE OPERAZIONI $R_{m,i}(\lambda)$ CON $i = m+1 \dots n$ POSSIAMO ANNULLARE TUTTE LE ENTRATE DELLA RIGA m-ESIMA. QUINDI COME NEL CASO PRECEDENTE

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \alpha_{m+1} & \\ 0 & & & & \ddots & \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_{m-1} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \alpha_{m+1} & & * \\ & 0 & & & & \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

PERCHÈ HA UNA RIGA UGUALE A ZERO.

#

QUESTO LEMMA HA UNA IMPORTANTE CONSEGUENZA

PROPOSIZIONE 4

SIA M UNA MATRICE $n \times n$ ALLORA

$\operatorname{Det} M \neq 0$ SE E SOLO SE $\operatorname{rango} M = n$

dim

SIA N UNA RIDUZIONE A SCALINI DI M. PER IL LEMMA PRECEDENTE $\operatorname{Det} M \neq 0 \iff \operatorname{Det} N \neq 0$.
SE RANGO$(N) < n$ ALLORA N HA UNA RIGA UGUALE A ZERO E $\operatorname{Det}(N) = 0$.
SE RANGO $N = n$ ALLORA

$$N = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{CON } \alpha_1, \dots, \alpha_n \neq 0$$

e $\text{Det } N = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n \neq 0$

#

OSSERVAZIONE 5

TUTTO QUELLO CHE ABBIAMO DETTO IN QUESTA SEZIONE PER QUANTO RIGUARDA IL COMPORTAMENTO DEL DETERMINANTE RISPETTO ALLE OPERAZIONI SULLE RIGHE VALE ANCHE PER LE COLONNE. IN PARTICOLARE

- DET $= 0$ SE DUE COLONNE SONO UGUALI
- DET È LINEARE SULLE COLONNE
- DET CAMBIA DI SEGNO SE SCAMBIO DUE COLONNE
- DET NON CAMBIA SE SOMMO AD UNA COLONNA UN MULTIPLO DI UN'ALTRA COLONNA.

QUESTO SEGUE DALLA PROPRIETÀ 5 DEL TEOREMA 1 OVVERO $\text{Det}(M) = \text{Det}(M^t)$.

INFATTI OGNI OPERAZIONE O AFFERMAZIONE SULLE COLONNE SI TRASFORMA IN UN'OPERAZIONE O AFFERMAZIONE ANALOGA SULLE RIGHE QUANDO TRASFORMO UNA MATRICE NELLA SUA TRASPOSTA.

DETERMINANTE DI UN PRODOTTO, DETERMINANTE DELL'INVERSA E DETERMINANTE DI $F: V \to V$ LINEARE

TEOREMA 6 (TEOREMA DI BINET)

SIANO A E B DUE MATRICI $n \times n$. ALLORA

$$\mathrm{Det}(A \cdot B) = \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B)$$

dim

1° CASO Rango $B = n$. IN QUESTO CASO SAPPIAMO CHE $\mathrm{DET}\, B \neq 0$ QUINDI SI TRATTA DI DIMOSTRARE CHE

$$\mathrm{Det}(A) = \frac{\mathrm{Det}(A \cdot B)}{\mathrm{Det}(B)}$$

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $G(A) = \dfrac{\mathrm{Det}(A \cdot B)}{\mathrm{Det}(B)}$

SE FACCIAMO VEDERE CHE G HA LE PROPRIETÀ ①, ②, ③ DEL TEOREMA 1 ALLORA $G = \mathrm{DET}$.

① $$G(I) = \frac{\mathrm{Det}(A)}{\mathrm{Det}(A)} = 1$$

② SE A HA 2 RIGHE UGUALI ALLORA $G(A) = 0$.

INFATTI SIA $A = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$ CON $A^{(i)}$ LE RIGHE DI A. ALLORA

$$A \cdot B \begin{pmatrix} A^{(1)} \cdot B \\ \vdots \\ A^{(n)} \cdot B \end{pmatrix}$$

QUINDI SE $A^{(i)} = A^{(s)}$ ALLORA $A^{(i)} \cdot B = A^{(s)} \cdot B$

E $\mathrm{Det}(A \cdot B) = 0$ PERCHÈ HA DUE RIGHE UGUALI. QUINDI

$$G(A) = \frac{\mathrm{Det}(A B)}{\mathrm{Det}\, B} = 0$$

SE A HA DUE RIGHE UGUALI.

③ G È LINEARE SULLE RIGHE.

- SIA $A = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(i)} + \tilde{A}^{(i)} \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$ ALLORA $A \cdot B = \begin{pmatrix} A^{(1)} \cdot B \\ A^{(i)} \cdot B + A^{(j)} \cdot B \\ A^{(n)} \cdot B \end{pmatrix}$

QUINDI

$$\mathrm{Det}(A \cdot B) = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} A^{(1)} \cdot B \\ A^{(i)} \cdot B \\ A^{(n)} \cdot B \end{pmatrix} + \mathrm{Det} \begin{pmatrix} A^{(1)} \cdot B \\ \tilde{A}^{(i)} \cdot B \\ A^{(n)} \cdot B \end{pmatrix} =$$

DA CUI

$$G(A) = G \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(i)} \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \tilde{A}^{(i)} \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$$

- SIMILMENTE SE $A = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \alpha \tilde{A}^{(i)} \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$ ALLORA

$$G(A) = \alpha\, G \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \alpha \tilde{A}^{(i)} \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$$

2° CASO   Rango $B < n$. In questo caso $\mathrm{Det}(B) = 0$ e dobbiamo dimostrare che $\mathrm{Det}(AB) = 0$ ovvero che rango $(AB) < n$. Ricordiamo che rango $(B) < n$ se e solo se $\exists\, x \neq 0$ e $B \cdot x = 0$. Allora $(A \cdot B) \cdot x = A \cdot (B \cdot x) = 0$ e quindi rango $(AB) < n$ ovvero che $\mathrm{Det}(AB) = 0$

#

Questo teorema è utile in molte situazioni e ha anche due implicazioni importanti che spieghiamo qui sotto.

COROLLARIO 7

Sia A una matrice $n \times n$ di rango n ovvero invertibile. Allora

$$\mathrm{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}\, A}$$

dim

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

quindi dal teorema di Binet ricaviamo

$$\mathrm{Det}(A)\ \mathrm{Det}(A^{-1}) = 1$$

da cui la tesi.

#

DEFINIZIONE 8

Sia V uno sp. vettoriale di dimensione finita e sia $F: V \longrightarrow V$ una applicazione lineare. Sia $v_1 \dots v_n$ una base di V.

Allora definiamo

$$\mathrm{Det}(F) = \mathrm{Det}\left([F]^{v_1 \dots v_n}_{v_1 \dots v_n} \right)$$

Per dimostrare che questa definizione è ben data dobbiamo dimostrare che il termine sulla destra non dipende dalla scelta della base, ovvero che se $w_1 \dots w_n$ è un'altra

BASE DI V ALLORA

$$\mathrm{Det}\left([F]_{v_1 \dots v_n}^{v_1 \dots v_n}\right) = \mathrm{Det}\left([F]_{w_1 \dots w_n}^{w_1 \dots w_n}\right)$$

PONIAMO $A = [F]_{v_1 \dots v_n}^{v_1 \dots v_n}$ $B = [F]_{w_1 \dots w_n}^{w_1 \dots w_n}$
E $C = [\underset{V}{I}]_{w_1 \dots w_n}^{v_1 \dots v_n}$. ALLORA DA

$$[F]_{w_1 \dots w_n}^{w_1 \dots w_n} = [\underset{V}{I}]_{w_1 \dots w_n}^{v_1 \dots v_n} \; [F]_{v_1 \dots v_n}^{v_1 \dots v_n} \; [\underset{V}{I}]_{v_1 \dots v_n}^{w_1 \dots w_n}$$

E DA $[\underset{V}{I}]_{v_1 \dots v_n}^{w_1 \dots w_n} = \left([I]_{w_1 \dots w_n}^{v_1 \dots v_n}\right)^{-1}$ RICAVIAMO

$$B = C A C^{-1}.$$

QUINDI DAL TEOREMA DI BINET E DAL COROLLARIO PRECEDENTE RICAVIAMO

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\, B &= \mathrm{Det}\, C \cdot \mathrm{Det}\, A \cdot \mathrm{Det}\, C^{-1} \\ &= \mathrm{Det}\, C \cdot \mathrm{Det}\, A \cdot \frac{1}{\mathrm{Det}\, C} \\ &= \mathrm{Det}\, A \end{aligned}$$

OVVERO

$$\mathrm{Det}\left([F]_{v_1 \dots v_n}^{v_1 \dots v_n}\right) = \mathrm{Det}\left([F]_{w_1 \dots w_n}^{w_1 \dots w_n}\right).$$

SVILUPPO DI LAPLACE E DETERMINANTE DI UNA MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE A BLOCCHI.

LO SVILUPPO È UNA FORMULA CHE PERMETTE DI CALCOLARE RIDUCENDOSI A MATRICI SEMPRE PIÙ PICCOLE.

PER $n=1$ $\quad Det_1(a) = a$ INFATTI QUESTA FUNZIONE HA LE PROPRIETÀ ① ② ③ DEL TEOREMA 1

PER $n=2$ $\quad Det_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ INFATTI QUESTA FUNZIONE HA LE PROPRIETÀ ① ② ③ DEL TEOREMA 1.

IN GENERALE LO SVILUPPO DI LAPLACE PERMETTE DI RIDURRE IL CALCOLO DEL DETERMINANTE DI UNA MATRICE $n \times n$ AL CALCOLO DI DETERMINANTI DI MATRICI $(n-1)\times(n-1)$.

PRIMA DI ENUNCIARE LA FORMULA ABBIAMO BISOGNO DI INTRODURRE UNA NOTAZIONE

NOTAZIONE

Sia A UNA MATRICE $n \times n$ ALLORA A_{ij} È LA MATRICE CHE SI OTTIENE DA A CANCELLANDO LA RIGA i-ESIMA E LA COLONNA j-ESIMA.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ -6 & -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \\ -6 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 9 (SVILUPPO DI LAPLACE)

Sia $A = (a_{ij})$ UNA MATRICE $n \times n$ E FISSIAMO UNA RIGA, DICIAMO LA i-ESIMA.

ALLORA

$$Det_n(A) = (-1)^{i+1} a_{i1}\, Det_{n-1}(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2}\, Det_{n-1}(A_{i2}) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{i+n} a_{in}\, Det_{n-1}(A_{in}) .$$

Esempio

Prendiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

e fissiamo la seconda riga, cioè $i=2$. Allora

$$\mathrm{Det}_3\, A = -a_{21}\, \mathrm{Det}_2 \left(A_{21} \right) + a_{22}\, \mathrm{Det}_2 \left(A_{22} \right) - a_{23}\, \mathrm{Det}_2 \left(A_{23} \right)$$

$$= -1 \cdot \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\, \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -(4-35) - 3(14-12)$$

$$= 31 - 6 = 25$$

Esempio

Possiamo utilizzare la formula di Laplace anche per ricavare la seguente formula generale per il determinante delle matrici 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

scegliendo $i=1$ otteniamo

$$\mathrm{Det}(A) = a_1\, \mathrm{Det} \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - b_1\, \mathrm{Det} \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$+ c_1\, \mathrm{Det} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3$$

$$- a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3$$

Possiamo ricordarci questa formula così: ripetiamo le prime due colonne dopo la terza

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{matrix}$$

Tracciamo le "diagonali" come in figura. Per ogni diagonale facciamo il prodotto delle entrate, sommiamo le e sottraiamo le

OSSERVAZIONE 10

DALLA PROPRIETÀ 5 DEL TEOREMA 1 SEGUE CHE UNA FORMULA ANALOGA VALE PER LE COLONNE OVVERO SE FISSIAMO LA COLONNA j-ESIMA, ALLORA

$$\mathrm{Det}_n(A) = (-1)^{1+j} e_{1j} \, \mathrm{Det}_{n-1}(A_{1j}) + (-1)^{2+j} e_{2j} \, \mathrm{Det}_{n-1}(A_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+j} e_{nj} \, \mathrm{Det}_{n-1}(A_{nj})$$

DIMOSTRIAMO ORA IL TEOREMA 9. INIZIAMO CON IL CALCOLO DI UNA MATRICE PARTICOLARE.

ESEMPIO

SIA A LA SEGUENTE MATRICE 7×7 IN CUI TUTTE ENTRATE, TRANNE QUELLE SEGNATE, SONO UGUALI A 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

SE SCAMBIAMO LA 3^a RIGA CON LA 4^a RIGA
LA 4^a RIGA CON LA 5^a RIGA
LA 5^a RIGA CON LA 6^a RIGA

LA MATRICE SI TRASFORMA NELL'IDENTITÀ QUINDI

$$\mathrm{Det}(A) = (-1)^3 \, \mathrm{Det}(I_7) = (-1)^3 = -1$$

ESEMPIO 11

POSSIAMO GENERALIZZARE L'ESEMPIO PRECEDENTE NEL SEGUENTE MODO:

SIA A UNA MATRICE $n \times n$ CHE SCRIVIAMO A BLOCCHI

$$\begin{array}{r c} & \text{colonne } j \\ & \downarrow \\ \text{righe } i \rightarrow & A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & 0 & 0 \\ \hline 0 & J & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \\ \hline \end{array} \end{array}$$

DOVE J È FATTA COSÌ

$$\begin{array}{rc} \text{riga } i \longrightarrow & \begin{bmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \\ & \uparrow \\ & \text{colonne } j \end{array}$$

SE SCAMBIO LA RIGA i-ESIMA CON LA $(i+1)$-ESIMA
LA RIGA $(i+1)$-ESIMA CON LA $(i+2)$-ESIMA
...
LA RIGA $(j-1)$ ESIMA CON LA j-ESIMA

LA MATRICE SI TRASFORMA NELL'IDENTITÀ QUINDI

$$\text{Det } A = (-1)^{j-i} \text{ Det } I = (-1)^{j-i} = (-1)^{i+j}$$

LEMMA 12

$$\begin{array}{cc} & \text{colonne } j \\ \text{Det}_n & \left(\begin{array}{c|c|c} A & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} & B \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 & 0 \ \ 0 \\ \hline C & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} & D \end{array}\right) \leftarrow \text{riga } i \end{array} = (-1)^{i+j} \ \text{Det}_{n-1} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline \end{array}$$

dim

POSSIAMO INTANTO SOMMARE ALLE RIGHE $\neq i$-ESIMA MULTIPLI OPPORTUNI DELLA RIGA i-ESIMA ELIMINANDO LE $*$ SENZA CAMBIARE IL DETERMINANTE. QUINDI BASTA DIMOSTRARE CHE

$$\text{Det} \left(\begin{array}{c|c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & B \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots \\ \hline C & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & D \end{array}\right) = (-1)^{i+j} \text{ Det} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) =$$

SI CONSIDERI LA FUNZIONE $G : \text{Mat}_{n \times n} \longrightarrow K$

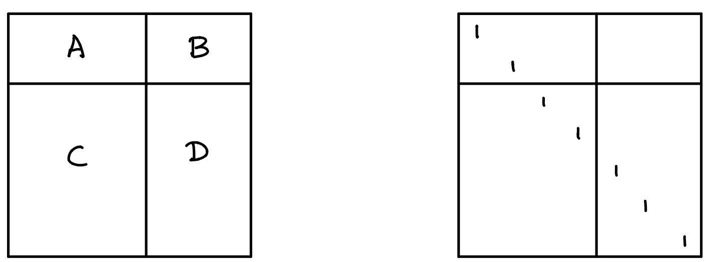
$$G \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = (-1)^{i+j} \text{ Det} \left(\begin{array}{c|c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & B \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots \\ \hline C & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & D \end{array}\right).$$

DIMOSTRIAMO CHE G HA LE PROPRIETÀ 1 2 3 DEL TEOREMA 1 ED È QUINDI UGUALE AL DETERMINANTE.

LA VERIFICA DELLE PROPRIETÀ 2 E 3 È MOLTO SIMILE A QUELLA CHE ABBIAMO FATTO PER IL TEOREMA DI BINET, ANZI IN QUESTO CASO È UN PÒ PIÙ SEMPLICE. PROVATE A FARLA PER ESERCIZIO.

LA VERIFICA DELLA PROPRIETÀ 1 È INVECE PIÙ COMPLICATA IN QUESTO CASO. DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $G(I) = 1$.

FACCIAMO IL CASO $i<j$ (IL CASO $i \geq j$ È DEL TUTTO ANALOGO). DOBBIAMO SCRIVERE LA MATRICE I COME UNA MATRICE A BLOCCHI DI QUESTA FORMA. ABBIAMO



QUINDI

$$G(I) = (-1)^{i+j} \operatorname{Det} \begin{array}{cccc|c|ccc}
1 &&&& 0 &&& \\
& 1 &&& 0 &&& \\ \hline
0 & \cdots && 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
&& 1 && 0 &&& \\
&&& 1 & 0 &&& \\
&&&& 0 & 1 && \\
&&&& 0 && 1 & \\
&&&& 0 &&& 1
\end{array} = (-1)^{i+j} \operatorname{Det} \begin{array}{cc|cc|c|ccc|l}
&&&& \text{COLONNA } j &&&& \\
1 &&&& 0 &&&& \\
& 1 &&& 0 &&&& \\ \hline
0 & \cdots & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \text{RIGA } i \\ \hline
&& 1 && 0 &&&& \\
&&& 1 & 0 &&&& \\ \hline
&&&& 0 & 1 &&& \\
&&&& 0 && 1 && \\
&&&& 0 &&& 1 &
\end{array}$$

ORA SE DIVIDIAMO LA MATRICE NEI BLOCCHI TRACCIATI DI VERDE OSSERVIAMO CHE L'ULTIMA MATRICE È PROPRIO QUELLA DELL'ESEMPIO PRECEDENTE.

QUINDI $G(I) = (-1)^{i+j} \cdot (-1)^{i+j} = 1$

#

<u>DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI LAPLACE</u>

SCRIVIAMO LA RIGA i-ESIMA NEL SEGUENTE MODO

$$(a_{i1}, \dots, a_{in}) =$$

$$a_{i1}(1, 0 \dots 0) + a_{i2}(0\, 1\, 0 \dots) + \dots + a_{in}(0 \dots 0\, 1)$$

PER LA PROPRIETÀ 3 DEL DETERMINANTE ABBIAMO

$$\operatorname{Det} A = a_{i1} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & & & a_{nn}\end{pmatrix} + a_{i2} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{pmatrix} + \dots$$

$$+ a_{in} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ 0 & \dots & 1 \\ a_{n1} & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

PER IL LEMMA PRECEDENTE ABBIAMO CHE IL j-ESIMO TERMINE DI QUESTA SOMMA È

$$a_{ij} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \dots} & a_{1j} & \boxed{\quad a_{1n}} \\ 0 \quad 0 & 1 & 0 \quad 0 \\ \boxed{a_{n1}\quad} & a_{nj} & \boxed{\quad a_{nn}} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} \operatorname{Det}(A_{ij})$$

E QUESTO DIMOSTRA LA FORMULA DI LAPLACE #

DIMOSTRIAMO ADESSO UNA FORMULA PER IL CALCOLO DEL DETERMINANTE DI UNA MATRICE A BLOCCHI CHE SARÀ UTILE NEL SEGUITO DEL CORSO.

PROPOSIZIONE 13

SIA $n = \ell + k$ E SIA X UNA MATRICE DELLA FORMA

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \qquad \text{CON } A\ \ell\times\ell \quad \begin{matrix} B & \ell\times k \\ D & k\times k\end{matrix}$$

ALLORA $$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D\end{pmatrix} = \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} D$$

dimostrazione

SUPPONIAMO PRIMA CHE A NON SIA INVERTIBILE. ALLORA $N(A) \neq 0$ OVVERO ESISTE $y \neq 0$ E $Ay = 0$.

ALLORA
$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

QUINDI ANCHE LA MATRICE $\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$ NON È INVERTIBILE. QUINDI

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = 0 = \mathrm{Det}\, A \cdot \mathrm{Det}\, B$$

SUPPONIAMO ADESSO CHE A SIA INVERTIBILE, ALLORA

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_\ell & A^{-1}B \\ O & I_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & O \\ O & I_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_\ell & O \\ O & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_\ell & A^{-1}B \\ O & I_k \end{pmatrix}$$

QUINDI DAL TEOREMA DI BINET OTTENIAMO

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} A & O \\ O & I_k \end{pmatrix} \mathrm{Det} \begin{pmatrix} I_\ell & O \\ O & D \end{pmatrix} \mathrm{Det} \begin{pmatrix} I_\ell & A^{-1}B \\ O & I_k \end{pmatrix}$$

APPLICANDO PIÙ VOLTE IL LEMMA 12 ABBIAMO

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} A & O \\ O & I_k \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\, A \qquad \text{E}$$

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} I_\ell & O \\ O & D \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\, D$$

INFINE UNA QUALSIASI MATRICE DELLA FORMA

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} I_\ell & C \\ O & I_k \end{pmatrix} = 1$$

INFATTI SVILUPPANDO RISPETTO ALL'ULTIMA RIGA SI OTTIENE IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE DELLA STESSA FORMA MA PIÙ PICCOLA:

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} I_\ell & C \\ O & I_k \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathrm{Det} \begin{pmatrix} I_\ell & C' \\ O & I_{k-1} \end{pmatrix}$$

E PROCEDENDO IN QUESTO MODO SI ARRIVA A $\mathrm{Det}\, I_\ell = 1$.

#

FORMULA DI CRAMER E CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA

I DETERMINANTI POSSONO ANCHE ESSERE UTILIZZATI PER CALCOLARE LE SOLUZIONI DI UN SISTEMA DELLA FORMA

$$Ax = b$$

CON A MATRICE $n \times n$ INVERTIBILE, OVVERO CON $\mathrm{Det}(A) \neq 0$. IN QUESTO CASO SAPPIAMO CHE PER OGNI $b \in K^n$ ESISTE UN'UNICA SOLUZIONE $x \in K^n$ DEL SISTEMA.

TEOREMA 14 (FORMULA DI CRAMER)

SIA A UNA MATRICE $n \times n$ CON $\mathrm{Det}(A) \neq 0$, SIA $b \in K^n$ E SIA $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ L'UNICA SOLUZIONE DEL SISTEMA $Ax = b$.

ALLORA

$$x_i = \frac{\mathrm{Det}\left(A_{(1)} \dots A_{(i-1)} \; b \; A_{(i+1)} \dots A_{(n)}\right)}{\mathrm{Det}(A)}$$

DOVE $A_{(1)} \dots A_{(n)}$ SONO LE COLONNE DELLA MATRICE A.

ESEMPIO

SI CONSIDERI LA SOLUZIONE DEL SISTEMA.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

IL DETERMINANTE DELLA MATRICE 3×3 È UGUALE A 3 QUINDI SIAMO NELLE CONDIZIONI DEL TEOREMA PRECEDENTE. ALLORA

$$x = \frac{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1 \cdot (-5) + 2 \cdot 5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$z = \frac{\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1 \cdot 2 + 2\,(-3)}{3} = -\frac{4}{3}$$

dim della formula di Cramer

Poiché $A x = b$ abbiamo

$$b = x_1 A_{(1)} + x_2 A_{(2)} + \cdots + x_n A_{(n)} .$$

SE SOSTITUIAMO QUESTA ESPRESSIONE NEL CALCOLO DEL

$$\text{Det}\left(A_{(1)} \ldots A_{(i-1)}\ b\ A_{(i)} \ldots A_{(n)}\right)$$ OTTENIAMO

$$\text{Det}\Big(A_{(1)} \ldots A_{(i-1)}\ \underbrace{x_1 A_{(1)} + \cdots + x_i A_{(i)} + \cdots + x_n A_{(n)}}_{b}\ A_{(i+1)} \ldots A_{(n)}\Big)$$

POSSIAMO ORA TOGLIERE ALLA COLONNA i-ESIMA DI QUESTA MATRICE CHE ABBIAMO OTTENUTO LA PRIMA COLONNA MOLTIPLICATA PER x_1 SENZA CAMBIARE IL DETERMINANTE. SIMILMENTE POSSIAMO TOGLIERE LA COLONNA j-ESIMA, SE $j \neq i$, MOLTIPLICATA PER x_j. OTTENIAMO QUINDI CHE L'ESPRESSIONE PRECEDENTE È UGUALE A

$$\text{Det}\left(A_{(1)}\ A_{(2)} \ldots A_{(i-1)}\ \ x_i \cdot A_{(i)}\ \ A_{(i+1)} \ldots A_{(n)}\right) =$$

$$= x_i \cdot \text{Det}\left(A_{(1)} \ldots A_{(n)}\right) = x_i \cdot \text{Det}(A).$$

QUINDI

$$\frac{\text{Det}\left(A_{(1)} \ldots A_{(i-1)}\ b\ A_{(i+1)} \ldots A_{(n)}\right)}{\text{Det } A} = \frac{x_i \cdot \text{Det } A}{\text{Det } A} = x_i .$$

COME VOLEVAMO DIMOSTRARE #

POSSIAMO UTILIZZARE QUESTA FORMULA ANCHE PER CALCOLARE LA MATRICE INVERSA.

TEOREMA 15

SIA A UNA MATRICE $n \times n$ CON $\mathrm{Det}\, A \neq 0$ E SIA $B = (b_{ij})$ LA MATRICE INVERSA DI A. ALLORA

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\, \mathrm{Det}\,(A_{ji})}{\mathrm{Det}\, A}$$

DOVE A_{ji} È LA MATRICE CHE OTTENGO DA A LEVANDO LA COLONNA j-ESIMA E LA RIGA i-ESIMA. (NOTA: i E j SI SONO SCAMBIATI!).

ESEMPIO

SIA $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ CON $\mathrm{Det}\, A = ad - bc \neq 0$.

CALCOLIAMO A^{-1} APPLICANDO LA FORMULA PRECEDENTE.

SIA $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{33} \end{pmatrix}$.

$$b_{11} = (-1)^2 \frac{d}{ad-bc} = \frac{d}{ad-bc} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$b_{12} = (-1)^3 \frac{b}{ad-bc} = \frac{-b}{ad-bc} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$b_{21} = (-1)^3 \frac{c}{ad-bc} = \frac{-c}{ad-bc} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$b_{22} = (-1)^4 \frac{a}{ad-bc} = \frac{a}{ad-bc} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

SULLA DESTRA HO SEGNATO IN VERDE LA RIGA E LA COLONNA CHE VA TOLTA ALLA MATRICE A PER CALCOLARE b_{ij}. SI NOTI CHE VA TOLTA LA RIGA j E LA COLONNA i.

LA FORMULA CHE OTTENIAMO È:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

CHE GIÀ CONOSCIAMO.

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il determinante di A è uguale a $-1 - 2(2-1) = -3$. Quindi A è invertibile. Calcoliamo l'inversa applicando la formula precedente. Sia

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{11} = (-1)^2 \frac{1}{-3} \operatorname{Det} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{12} = (-1)^3 \frac{1}{-3} \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{13} = (-1)^4 \frac{1}{-3} \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{21} = (-1)^3 \frac{1}{-3} \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{22} = (-1)^4 \frac{1}{-3} \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{23} = (-1)^5 \frac{1}{-3} \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{31} = (-1)^4 \frac{1}{-3} \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{32} = (-1)^5 \frac{1}{-3} \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{33} = (-1)^6 \frac{1}{-3} \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

dimostrazione del teorema 15

Sia $B_{(j)} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ la j-esima colonna di B.

ALLORA DA $A \cdot B = I_n$ SI RICAVA

$$A \cdot B_{(j)} = e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{j esima riga}$$

ALLORA DALLA FORMULA DI LAPLACE RICAVO

$$b_{ij} = \frac{\operatorname{Det}\left(A_{(1)} \ldots A_{(i-1)} \overset{\text{i-esima colonna}}{e_j} A_{(i+1)} \ldots A_{(n)}\right)}{\operatorname{Det}}$$

E CALCOLANDO IL DET AL NUMERATORE USANDO LA FORMULA DI LAPLACE RISPETTO ALLA j-ESIMA COLONNA OTTENIAMO.

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\operatorname{Det}(A_{ji})}{\operatorname{Det}(A)}$$

COME VOLEVAMO DIMOSTRARE #

COSTRUZIONE DEL DETERMINANTE OVVERO DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1

IN QUESTA ULTIMA SEZIONE DIMOSTRIAMO IL TEOREMA 1. ABBIAMO GIÀ OSSERVATO CHE L'UNICITÀ DELLA FUNZIONE F SEGUE DAL FATTO CHE LE PROPRIETÀ ① ② ③ PERMETTONO DI CALCOLARE F. ORA COSTRUIREMO UNA TALE FUNZIONE. SI PUÒ DARE QUESTA DEFINIZIONE IN TANTI MODI DIVERSI. NOI PROCEDEREMO PER INDUZIONE RIBALTANDO IN PARTE L'ORDINE LOGICO DELL'ESPOSIZIONE FATTA SOPRA. IN PARTICOLARE PER DEFINIRE IL DETERMINANTE CI ISPIREREMO ALLA FORMULA DI LAPLACE. DEFINIAMO UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI

$$\mathrm{Det}_n : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$$

NEL SEGUENTE MODO:

$$\mathrm{Det}_1 \left((a) \right) = a$$

$$\mathrm{Det}_n\left((a_{ij})\right) = a_{11}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A_{11}) - a_{21}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathrm{Det}_{n-1}(A_{n1})$$

ORA DIMOSTRIAMO PER INDUZIONE SU n CHE Det_n COSÌ DEFINITO HA LE PROPRIETÀ ① ② ③ E ④.

PER $n=1$ NON C'È NULLA DA DIMOSTRARE

DIMOSTRIAMO $n-1 \Rightarrow n$.

① $\mathrm{Det}_n(I_n) = 1 \cdot \mathrm{Det}_{n-1}(I_{n-1}) = 1$

② SE A HA DUE RIGHE UGUALI LA i-ESIMA E LA j-ESIMA E $i<j$ ALLORA A_{h1} HA DUE RIGHE UGUALI PER $h \neq i,j$ E QUINDI $\mathrm{Det}_{n-1} A_{h1} = 0$ PER $h \neq i,j$ E PER DEFINIZIONE

$$\mathrm{Det}_n(A) = (-1)^{i+1} a_{i1}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A_{i1}) + (-)^{j+1}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A_{j1})$$

ORA SE $\tilde{A}$ È LA MATRICE A ALLA QUALE TOLGO LA PRIMA COLONNA E

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \vdots \\ \tilde{A}_n \end{pmatrix} \quad \text{ALLORA } B = \tilde{A}_i = \tilde{A}_j \quad \text{E}$$

$$A_{i1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_{i-1} \\ \tilde{A}_{i+1} \\ B \\ \tilde{A}_n \end{pmatrix} \qquad A_{j1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ B \\ \tilde{A}_{j-1} \\ \tilde{A}_{j+1} \\ \tilde{A}_n \end{pmatrix}$$

QUINDI SONO LE STESSE RIGHE ANCHE SE PERMUTATE. SONO $j-i-1$ SCAMBI QUINDI ABBIAMO

$$\mathrm{Det}_{n-1}\left(A_{i1}\right) = (-1)^{j-i-1}\,\mathrm{Det}\left(A_{j1}\right)$$

DA CUI

$$\mathrm{Det}\,A = (-1)^{j}\,\mathrm{Det}(A_{j1}) + (-1)^{j+1}\,\mathrm{Det}(A_{j1}) = 0.$$

3 LASCIAMO LA VERIFICA DI QUESTA PROPRIETÀ PER ESERCIZIO. SEGUE P.I. DA QUELLA DI Det_{n-1}

5 ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE Det_n COSÌ DEFINITO HA LE PROPRIETÀ 1 2 3.
NELLA DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI LAPLACE NON ABBIAMO MAI FATTO USO DELLA PROPRIETÀ 5 QUINDI RICAVIAMO CHE PER Det_n VALE ANCHE

$$\mathrm{Det}_n\left((a_{ij})\right) = a_{11}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A_{11}) - a_{12}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A_{12}) \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A_{1n})$$

CHE SI NOTI BENE È DIVERSA DALLA DEFINIZIONE DI DET_n.

IN PARTICOLARE SE $B = (b_{ij}) = A^t$ ABBIAMO

$$\mathrm{Det}\,A^t = b_{11}\,\mathrm{Det}_{n-1}(B_{11}) - b_{12}\,\mathrm{Det}_{n-1}(B_{12}) \cdots + (-1)^{n+1} b_{1n}\,\mathrm{Det}_{n-1}(B_{1n})$$

E OSSERVIAMO $b_{ij} = a_{ji}$ E $B_{ij} = A^t_{ji}$. QUINDI

$$\mathrm{Det}\,A^t = a_{11}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A^t_{11}) - a_{21}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A^t_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A^t_{n1})$$

ORA P.I. POSSIAMO ASSUMERE $\mathrm{Det}_{n-1}(X^t) = \mathrm{Det}_{n-1}(X)$ DA CUI

$$\mathrm{Det}\,A^t = a_{11}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A_{11}) - a_{21}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1}\,\mathrm{Det}_{n-1}(A_{n1})$$
$$= \mathrm{Det}\,A$$

#