

DESCRIZIONE DI SPAZI E SOTTOSPAZI

In questa sezione vogliamo presentare qualche esercizio sulla definizione dei sottospazi di uno spazio vettoriale e in particolare di K^n .

Esistono essenzialmente due modi per descrivere un sottospazio, che sono del tutto paralleli ai modi per descrivere un insieme:

- parametrizzare un sottospazio che è un particolare modo di descrivere un insieme con lista
- dare le equazioni di un sottospazio che è un particolare modo di descrivere un insieme fornendo una proprietà che lo caratterizza gli elementi.

Due esempi che più essere utili avere in mente del primo e del secondo modo sono i seguenti: Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $u = (1, 2, 3)$.

la retta $U = \mathbb{R}u = \left\{ tu : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio parametrizzato

il piano $W = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot u = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0 \right\}$ è un sottospazio descritto tramite una equazione.

Diamo le definizioni precise di cosa sia una parametrizzazione e di cosa voglia dire definire un sottospazio tramite equazioni e spiegheremo come passare da una descrizione all'altra. Introduciamo anche un minimo di terminologia per gli spazi o i sottospazi vettoriali:

ALCUNE DEFINIZIONI

DEFINIZIONE (retta, piano, iperpiano)

Se V è un K -spazio vettoriale di $\dim = 1$ V si dice una retta.

Se V è un K -spazio vettoriale di $\dim = 2$ V si dice un piano.

Queste due definizioni si applicano in particolare ai sottospazi di uno spazio dato. Inoltre se W è un sottospazio dello spazio vettoriale di \dim finito V si dice che W è un iperpiano se $\dim W = \dim V - 1$.

Diamo ora le definizioni generali di parametrizzazione e di descrizione di un sottospazio mediante equazioni o forma cartesiana di un sottospazio.

DEFINIZIONE (parametrizzazione e forma cartesiana)

Sia V uno spazio vettoriale e sia W un sottospazio di V .

- Una parametrizzazione di W è una $F: K^e \rightarrow V$ lineare e iniettiva tale che $\text{Im } F = W$

ovvero

$$W = \left\{ F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_e \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_e \in K \right\}$$

- Una definizione alternativa di W è una $F: V \rightarrow K^b$ lineare tale che $N(F) = W$

ovvero se

$$F(v) = \begin{pmatrix} F_1(v) \\ \vdots \\ F_b(v) \end{pmatrix} \text{ allora } W = \left\{ v \in V : F(v) = 0 \right\} = \left\{ v \in V : F_1(v) = \dots = F_b(v) = 0 \right\}$$

OSSERVAZIONE (ogni sottospazio ha una parametrizzazione)

Se $F: K^a \rightarrow V$ è una parametrizzazione di W allora $w_1 = F(e_1), \dots, w_a = F(e_a)$ sono una base di W per quanto osservato alla stessa all'inizio.

Viceversa se w_1, \dots, w_a è una base e posto $F: K^a \rightarrow W$ definito da

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_a \end{pmatrix} = x_1 w_1 + \dots + x_a w_a$$

allora F è una parametrizzazione.

In particolare ogni sottospazio di dim a ha una parametrizzazione $F: K^a \rightarrow V$.

Esempio - esercizio

Trovare una parametrizzazione del piano di \mathbb{R}^3 $x+2y+3z=0$: Abbiamo già visto che se individuiamo ^{come} variabili libere y, z allora possiamo dedurre che

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è una base di } W$$

Quindi $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $F \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = t v_1 + s v_2 = \begin{pmatrix} -2t - 3s \\ t \\ s \end{pmatrix}$ è una parametrizzazione di W .

OSSERVAZIONE

Nelle definizioni di parametrizzazione e forma canonica ^{è una simmetria}. Per la parametrizzazione chiediamo non solo che $\text{Im } F = W$ ma anche che F sia iniettiva. La richiesta simmetrica per la forma canonica è la seguente:

Una forma canonica minimale di W è una $G: V \rightarrow K^b$ tale che $N(G) = W$ e G è surgettiva.

Esempio

Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia W la retta $x+y=0$. Allora

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x+y$$

$$G_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad G_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

sono due forme canoniche, la prima minimale la seconda no.

La definizione di forma canonica minimale non è molto usata ma sarà comoda in queste discussioni.

OSSERVAZIONE (Ogni sottospazio ha una forma canonica minimale)

Sia $W \subset V$ con $\dim W = a$ e $\dim V = a+b$.

Sia w_1, \dots, w_a una base di W e w_{a+1}, \dots, w_{a+b} una base di V .

Sia $G: V \rightarrow K^b$ definita da

$$G(v) = \begin{pmatrix} x_{a+1} \\ \vdots \\ x_{a+b} \end{pmatrix} \quad \text{se } v = x_1 w_1 + \dots + x_{a+b} w_{a+b}$$

$$\text{Allora } N(G) = \{v = x_1 w_1 + \dots + x_a w_a\} = \langle w_1, \dots, w_a \rangle = W$$

e $G(w_{a+1}) = e_1, \dots, G(w_{a+b}) = e_b$ quindi $\text{Im } G = K^b$ cioè G è surgettiva.

Esempio - Esercizio

Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

- 1) Descrivere W in forma canonica.
- 2) Descrivere una parametrizzazione di W .

Soluzione

1) W è l'insieme di tutti i vettori di \mathbb{R}^4 della forma $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Più esplicitamente

$$W = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : \exists x_1, x_2, x_3 \text{ e } v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \right\}$$

Se A è la matrice le cui colonne sono v_1, v_2, v_3 abbiamo che

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3, \quad \text{quindi}$$

$$\begin{aligned} W &= \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : \exists x_1, x_2, x_3 : v = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : \text{il sistema } A \underline{x} = v \text{ ha soluzioni} \right\} = \text{Im } L_A \end{aligned}$$

Se poniamo $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ viene quindi

interessante e capire quale il sistema $A \underline{x} = v$ ha soluzioni.
La matrice completa di questo sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 1 & 2 & 0 & y_2 \\ 1 & 3 & 1 & y_3 \\ 0 & 4 & 4 & y_4 \end{array} \right)$$

Riducendo A a scalin' ottengo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 2 & 2 & y_3 - y_1 \\ 0 & 4 & 4 & y_4 \end{array} \right) \text{ e poi } \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 - 4y_2 + 4y_1 \end{array} \right)$$

quindi il sistema ha soluzioni esattamente quando

$$y_1 - y_2 + y_3 = 0 \quad \text{e} \quad 4y_1 - 4y_2 + y_4 = 0.$$

Quindi queste equazioni forniscono una descrizione cartesiana di W . In altre parole

$$G: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 + y_3 \\ 4y_1 - 4y_2 + y_4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo inoltre che $W = \text{Im } L_A$ e che $\text{rang } A = 2$ quindi $\dim W = 2$. La descrizione trovata G è quindi minimale.

2) Come abbiamo già osservato nel par. 1 abbiamo

$$W = \text{Im } L_A \quad \text{con} \quad L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4.$$

Abbiamo osservato che $\text{rang } A = 2$, quindi L_A non è iniettiva, quindi questa non è una parametrizzazione. La non iniettività delle applicazioni L_A è equivalente al fatto che v_1, v_2, v_3 sono lin. dip.

Abbiamo già visto nella seconda sezione sulla dimensione come estrane da v_1, v_2, v_3 una base. I conti necessari li abbiamo già fatti prima: si riduce A a scalin' e si prendono i vettori v_i con ai pivot. Quindi v_1, v_2 è una base di W . Quindi l'applicazione

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad F \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s v_1 + t v_2 = \begin{pmatrix} s+t \\ s+2t \\ s+3t \\ 4t \end{pmatrix}$$

è una parametrizzazione di W .

#

Ricapitoliamo vari modi di abbiamo visto di descrivere un sottospazio e i legami tra di loro.

1. Dato una parametrizzazione è con data una base di W :
l'osservazione "ogni sottospazio ha una parametrizzazione" sopra
2. Se W è descritto come sottospazio generato da v_1, \dots, v_k abbiamo visto come estrane una base dei generatori nella sezione dimensione 2^a parte, le porte nelle descrizioni di $\text{Im } L_A$

- 3 • Se W è descritto come sottospazio generato da v_1, \dots, v_2 abbiamo visto come calcolare le equazioni nell'esercizio sopra e la definizione di n ottiene è minima
- 4 • Il punti 1 e 3 in particolare ci mostrano come passare da una parametrizzazione alla forma cartesiana
- 5 • Se W è descritto come nucleo di una applicazione lineare abbiamo visto come calcolare una base, e quindi una parametrizzazione di W
- 6 • I punti 1 e 5 in particolare mostrano come passare da una definizione cartesiana ad una parametrica.