Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 15 luglio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito.

Domanda 1. Sia $z = 1 + i$. Calcolare il modulo, r, e l'argomento, θ, di z.

Risposta $r =$ $\qquad\qquad$ $\theta =$

Domanda 2. Sia Π il piano definito dall'equazione $x + y - 2z = 0$ e sia P il punto $(1, 2, 3)$. Calcolare la proiezione di P su Π.

Risposta: La proiezione di P su π è uguale a

Domanda 3. Per quali valori di ε la seguente matrice è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 1-\varepsilon \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Risposta: La matrice è diagonalizzabile per ε

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ e sia $\ker F = \{x \in \mathbb{R}^8 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ e } x_3 + x_5 + x_7 = 0\}$. Calcolare il rango di F.

Rango F=

Domanda 5. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo e sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se T è una isometria allora T è diagonalizzabile;
B) se $g(Tv, u) = g(v, Tu)$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}^3$ allora T è una isometria;
C) se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ allora $\dim U + \dim U^\perp = 3$;
D) se T è autoaggiunta e λ è un autovalore di T allora $\lambda = \pm 1$;
E) se T è una isometria e $det(T) = 1$ allora 1 è un autovalore di T.

Le risposte vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano X, Y, Z tre suoi sottospazi la cui somma è V, ovvero $V = X + Y + Z$. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se V è la somma diretta di X, Y e Z, e se $0 = x + y + z$ con $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$ allora $x = y = z = 0$;
B) se $X \cap Y = Y \cap Z = 0$ allora V è la somma diretta di X, Y e Z;
C) se V è la somma diretta di X, Y, Z allora $X \cap Z = 0$;
D) se $V = \mathbb{R}^2$, $X = \mathrm{Span}(e_1)$, $Y = \mathrm{Span}(e_2)$, $Z = \mathrm{Span}(e_1 + e_2)$, allora V è la somma diretta di X, Y e Z;
E) se $\dim X = \dim Y = \dim Z = 2$ allora $\dim V \leqslant 6$.

Le risposte vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 15 luglio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito.

Domanda 1. Sia $z = 3 + 3i$. Calcolare il modulo, r, e l'argomento, θ, di z.

Risposta $r =$ $\theta =$

Domanda 2. Sia Π il piano definito dall'equazione $2x + y + z = 0$ e sia P il punto $(1, -2, 3)$. Calcolare la proiezione di P su Π.

Risposta: La proiezione di P su π è uguale a

Domanda 3. Per quali valori di ε la seguente matrice è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 2 & 1+\varepsilon \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Risposta: La matrice è diagonalizzabile per ε

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}^8$ e sia $\ker F = \{x \in \mathbb{R}^9 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ e } x_3 + x_5 + 4x_7 = 0\}$. Calcolare il rango di F.

Rango $F =$

Domanda 5. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo e sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ allora $\dim U + \dim U^\perp = 3$;
B) se T è una isometria allora T è diagonalizzabile;
C) se $g(Tv, u) = g(v, Tu)$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}^3$ allora T è una isometria;
D) se T è una isometria e $det(T) = 1$ allora 1 è un autovalore di T.
E) se T è autoaggiunta e λ è un autovalore di T allora $\lambda = \pm 1$;

Le risposte vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano X, Y, Z tre suoi sottospazi la cui somma è V, ovvero $V = X + Y + Z$. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se V è la somma diretta di X, Y, Z allora $X \cap Z = 0$;
B) se $X \cap Y = Y \cap Z = 0$ allora V è la somma diretta di X, Y e Z;
C) se $V = \mathbb{R}^2$, $X = \mathrm{Span}(e_1)$, $Y = \mathrm{Span}(e_2)$, $Z = \mathrm{Span}(e_1 + e_2)$, allora V è la somma diretta di X, Y e Z;
D) se $\dim X = \dim Y = \dim Z = 2$ allora $\dim V \leqslant 6$.
E) se V è la somma diretta di X, Y e Z, e se $0 = x + y + z$ con $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$ allora $x = y = z = 0$;

Le risposte vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 15 luglio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito.

Domanda 1. Sia $z = 2 + 2i$. Calcolare il modulo, r, e l'argomento, θ, di z.

Risposta $r =$ $\theta =$

Domanda 2. Sia Π il piano definito dall'equazione $x + 2y - z = 0$ e sia P il punto $(1, 2, 2)$. Calcolare la proiezione di P su Π.

Risposta: La proiezione di P su π è uguale a

Domanda 3. Per quali valori di ε la seguente matrice è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 5 & 2-\varepsilon \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Risposta: La matrice è diagonalizzabile per ε

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ e sia $\ker F = \{x \in \mathbb{R}^6 \; : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ e } x_3 + x_5 = 0\}$. Calcolare il rango di F.

Rango F=

Domanda 5. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo e sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se T è una isometria e $det(T) = 1$ allora 1 è un autovalore di T.
B) se $g(Tv, u) = g(v, Tu)$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}^3$ allora T è una isometria;
C) se T è una isometria allora T è diagonalizzabile;
D) se T è autoaggiunta e λ è un autovalore di T allora $\lambda = \pm 1$;
E) se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ allora $\dim U + \dim U^\perp = 3$;

Le risposte vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano X, Y, Z tre suoi sottospazi la cui somma è V, ovvero $V = X + Y + Z$. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se V è la somma diretta di X, Y, Z allora $X \cap Z = 0$;
B) se $X \cap Y = Y \cap Z = 0$ allora V è la somma diretta di X, Y e Z;
C) se $\dim X = \dim Y = \dim Z = 2$ allora $\dim V \leqslant 6$.
D) se V è la somma diretta di X, Y e Z, e se $0 = x + y + z$ con $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$ allora $x = y = z = 0$;
E) se $V = \mathbb{R}^2$, $X = \mathrm{Span}(e_1)$, $Y = \mathrm{Span}(e_2)$, $Z = \mathrm{Span}(e_1 + e_2)$, allora V è la somma diretta di X, Y e Z;

Le risposte vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 15 luglio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito.

Domanda 1. Sia $z = 4 + 4i$. Calcolare il modulo, r, e l'argomento, θ, di z.

Risposta $r =$ $\theta =$

Domanda 2. Sia Π il piano definito dall'equazione $x + 2y + z = 0$ e sia P il punto $(3, 1, -2)$. Calcolare la proiezione di P su Π.

Risposta: La proiezione di P su π è uguale a

Domanda 3. Per quali valori di ε la seguente matrice è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 5 & 2+\varepsilon \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Risposta: La matrice è diagonalizzabile per ε

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ e sia $\ker F = \{x \in \mathbb{R}^7 \, : \, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ e } x_3 + x_5 = 0\}$. Calcolare il rango di F.

Rango $F=$

Domanda 5. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo e sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se $g(Tv, u) = g(v, Tu)$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}^3$ allora T è una isometria;
B) se T è una isometria e $det(T) = 1$ allora 1 è un autovalore di T.
C) se T è una isometria allora T è diagonalizzabile;
D) se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ allora $\dim U + \dim U^\perp = 3$;
E) se T è autoaggiunta e λ è un autovalore di T allora $\lambda = \pm 1$;

Le risposte vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Domanda 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano X, Y, Z tre suoi sottospazi la cui somma è V, ovvero $V = X + Y + Z$. Quali delle seguenti implicazioni sono vere?

A) se $X \cap Y = Y \cap Z = 0$ allora V è la somma diretta di X, Y e Z;
B) se V è la somma diretta di X, Y, Z allora $X \cap Z = 0$;
C) se $V = \mathbb{R}^2$, $X = \text{Span}(e_1)$, $Y = \text{Span}(e_2)$, $Z = \text{Span}(e_1 + e_2)$, allora V è la somma diretta di X, Y e Z;
D) se $\dim X = \dim Y = \dim Z = 2$ allora $\dim V \leqslant 6$.
E) se V è la somma diretta di X, Y e Z, e se $0 = x + y + z$ con $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$ allora $x = y = z = 0$;

Le risposte vere potrebbero essere più d'una: elencarle tutte.

Risposta: Le implicazioni corrette sono

Compito di Geometria e algebra lineare del 15 luglio 2019

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 30'.

Esercizio 1.

(1) Sia g un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Definisci cosa vuol dire che g è definito positivo.

(2) Se S è una matrice simmetrica reale $n \times n$, diciamo come sempre che S è *definita positiva* se $g_S(x, y) = {}^{\mathrm{t}}xSy$ è un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$. Mostra che se S e S' sono due matrici $n \times n$ definite positive allora anche $S + S'$ è una matrice definita positiva.

Esercizio 2. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Determina la forma di Jordan di A.

(2) Determina la forma di Jordan di A^3.

Esercizio 3. Considera le rette in $\mathbb{R}^3$

$$r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Scrivi in forma parametrica la retta s che è ortogonale ad entrambe r_1 e r_2.

(2) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r_1) = r_2$.

(3) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r_1) = r_2$ e $f(r_2) = r_1$.

Esercizio 4. Considera la conica dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$C_t = \{x^2 + (1-t)y^2 + 2tx - 2(1-t)y + 2 - t = 0\}.$$

(1) Determina il tipo di conica per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(2) Determina i centri della conica per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Risposte versione 1

Risposta 1. $r = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$;

Risposta 2. $(3/2, 5/2, 2)$;

Risposta 3. $\varepsilon \neq -1$;

Risposta 4. $rango = 2$;

Risposta 5. C, E;

Risposta 6. A, C, E.

Risposte versione 2

Risposta 1. $r = 3\sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$;

Risposta 2. $(0, -5/2, 5/2)$;

Risposta 3. $\varepsilon \neq 1$;

Risposta 4. $rango = 2$;

Risposta 5. A, D;

Risposta 6. A, D, E.

Risposte versione 3

Risposta 1. $r = 2\sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$;

Risposta 2. $(1/2, 1, 5/2)$;

Risposta 3. $\varepsilon \neq -2$;

Risposta 4. $rango = 2$;

Risposta 5. A, E;

Risposta 6. A, C, D.

Risposte versione 4

Risposta 1. $r = 4\sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$;

Risposta 2. $(5/2, 0, -5/2)$;

Risposta 3. $\varepsilon \neq 2$;

Risposta 4. $rango = 2$;

Risposta 5. B, D;

Risposta 6. B, D, E.

1. Soluzioni seconda parte

Esercizio 1.

(1) $g(v, v) > 0$ per ogni $v \neq 0$.
(2) Vale
$$^{\mathrm{t}}x(S + S')x = {}^{\mathrm{t}}xSx + {}^{\mathrm{t}}xS'x > 0$$
per ogni $x \neq 0$, perché ${}^{\mathrm{t}}xSx > 0$ e ${}^{\mathrm{t}}xS'x > 0$.

Esercizio 2. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (\lambda - 2)^4$. Troviamo
$$\dim\ker(A - 2I) = 2, \quad \dim\ker(A - 2I)^2 = 1.$$
Quindi l'unica forma di Jordan possibile è questa:
$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
La forma di Jordan di A^3 è la stessa di quella di J^3 perché A e J sono matrici simili e quindi lo sono anche A^3 e J^3. Facendo i conti a blocchi troviamo che
$$J^3 = \begin{pmatrix} 8 & a & b & 0 \\ 0 & 8 & c & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$
per qualche $a, b, c > 0$. Questa matrice ha $p(\lambda) = (\lambda - 8)^4$, $\dim\ker(J^3 - 8I) = 2, \dim\ker(J^3 - 8I)^2 = 1$ e quindi come sopra concludiamo che la sua matrice di Jordan è
$$J^3 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Le due rette si disegnano abbastanza facilmente.

(1) Le rette sonno entrambe orizzontali, quindi s è verticale e si trova

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) Ad esempio, una rototraslazione lungo s di passo 2 e angolo $\frac{\pi}{2}$ funziona. Troviamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Una rotazione di π (cioè una riflessione) intorno all'asse

$$s' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

funziona. Troviamo quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Otteniamo

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1-t & t-1 \\ t & t-1 & 2-t \end{pmatrix}.$$

Con il criterio di Jacobi troviamo

$$1, \ 1, \ \det A = 1 - t, \ \det \bar{A} = (t-1)^2(t+1).$$

Quindi:

- per $t \in (-1, 1)$ la matrice $\bar{A}$ è definita e quindi $C_t = \emptyset$,
- per $t < -1$ e $t > 1$ si ottiene rispettivamente una ellisse e una iperbole,
- per $t = \pm 1$ la conica è degenere. Si ottengono

  $$x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 3 = 0, \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

  che possono essere riscritte come

  $$(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 0, \quad (x+1)^2 = 0.$$

  La prima è il punto $(1, 1)$, la seconda è la retta $x = -1$ doppia.

Per $t \notin [-1, 1)$, la conica ha centro $(-t, 1)$. Per $t = 1$ tutti i punti della retta $x = -1$ sono un centro.