Compito di Geometria e algebra lineare di mercoledì 13 febbraio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Per le prime 5 domande scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per la sesta potete usare anche il retro del foglio. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte alle prime 5 domande. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 4 delle prime 5 domande. Per essere ammessi all'orale necessario inoltre rispondere correttamente alla sesta domanda.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 = -8 - 6i$.

Risposta: le soluzioni sono

Domanda 2. Sia $F : \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F(f(t)) = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}.$$

Si scriva la matrice A associata ad F rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ e $\mathbb{R}^3$.

Risposta: $A =$

Domanda 3. Si calcoli la segnatura del prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ associato alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Risposta: $(i_+, i_-, i_0) =$

Domanda 4. Sia R la rotazione di $\mathbb{R}^2$ attorno all'origine di angolo $\pi/6$ radianti in senso antiorario e sia $P = (1, 1)$. Si calcoli $R(P)$.

Risposta: $R(P) =$

Domanda 5. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 4 e sia $U + W = \mathbb{R}^5$. Si determini $\dim U \cap W$.

Risposta: $\dim U \cap W =$

Domanda 6. Siano U e W due sottospazi di V. Cosa vuol dire che V è la somma diretta di U e W? Dare la definizione.

Compito di Geometria e algebra lineare di mercoledì 13 febbraio 2019: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 15 di tempo.

Esercizio 1. Siano U e W due sottospazi di V. Si dimostri che se $U \cup W$ è un sottospazio allora $U \subset W$ o $W \subset U$.

Esercizio 2. Si descriva una applicazione lineare $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ con le seguenti proprietà.

- L'immagine di F è il sottospazio generato da $e_1 + e_2$ ed e_3;
- F è non diagonalizzabile;
- la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è uguale a 1.

Si determini inoltre la matrice associata ad F rispetto alla base standard in partenza ed in arrivo.

Esercizio 3. Sia W il piano di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $z = 0$ e sia ℓ una retta di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine. Sia R la rotazione attorno alla retta ℓ di angolo $\theta \neq 0$ e sia $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul piano W. Sia $F = P \circ R$ la loro composizione.

a) Si verifichi che se F è autoaggiunta allora e_3 è un autovettore di R.
b) Per quali rette ℓ e per quali valori dell'angolo θ l'applicazione F autoaggiunta?

Esercizio 4. Sia b il prodotto scalare di $V = \mathbb{R}^4$ che ha come matrice associata rispetto alla base standard, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia W il sottospazio di V definito dall'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Si determini la segnatura di b ristretto a W.

1. Soluzioni del compito del 13 febbraio 2019: prima parte

Risposta alla domanda 1: $z = \pm(1 - 3i)$

Risposta alla domanda 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Risposta alla domanda 3: $(2, 1, 0)$.

Risposta alla domanda 4: $R(P) = \big((-1 + \sqrt{3})/2, (1 + \sqrt{3})/2\big)$

Risposta alla domanda 5: $\dim U \cap W = 3$

Risposta alla domanda 6: Vuol dire che $U + W = V$ e che $U \cap W = 0$.

2. Soluzioni del compito del 13 febbraio 2019: seconda parte

Soluzione esercizio 1. Sia $Z = U \cup W$. Supponiamo che non sia $U \subset W$ e dimostriamo che $W \subset U$. Sia $u \in U \setminus W$. Per ogni $w \in W$ abbiamo che $z = u + w \in Z$ perché Z è per ipotesi un sottospazio. Quindi $z \in U$ o $z \in W$. Se fosse $z \in W$ sarebbe $u = z - w \in W$ contro le nostre ipotesi su u. Quindi $z \in U$. Allora $w = z - u \in U$. Abbiamo quindi dimostrato che se $w \in W$ allora $w \in U$ ovvero $W \subset U$.

Soluzione esercizio 2. Osserviamo che F dovrà avere rango 2 e di conseguenza dimensione del nucleo uguale a 1. Quindi F ha sicuramente come autovalore 0 e 1 (per la terza ipotesi). Poiché F è non diagonalizzabile uno di questi autovalori dovrà avere molteplicità algebrica 2 e può essere solo 0. Quindi F avra' come autovalori 0, con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1 e 1 con molteplicità algebrica e geometrica 1. Una matrice con queste caratteristiche è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'applicazione L_A non soddisfa però la prima richiesta perché ha come immagine il sottospazio generato da e_1 ed e_3. Possiamo però pensare che A sia la matrice associata ad F rispetto ad un'altra base. Se prendiamo la base $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_2, v_3 = e_3$ e scegliamo F come l'applicazine lineare tale che $[F]_v^v = A$, questa ha tutte le proprietà richieste infatti l'immagine sarà generata dai vettori v_1 e v_3, ovvero il sottospazio richiesto. Per calcolare la matrice associata ad F rispetto alla base standard in partenza e in arrivo effettuiamo il cambiamento di base. Abbiamo

$$[Id]_e^v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad [Id]_v^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$[F]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 3. Siano A, B, C le matrici associate a P, R, F rispetto alla base standard. Quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F è autoaggiunta se e solo se $c = f = 0$ e $b = d$. In questo caso abbiamo che e_3 è un autovettore e poiché R è una isometria lineare abbiamo$Re_3 = \pm e_3$.

Se $Re_3 = e_3$ allora R è una rotazione attorno all'asse z e $a = e = \cos\theta$ e $d = -b = \sin\theta$. Quindi $d = b$ se e solo se $\theta = 0, \pi$.

Supponiamo ora che $Re_3 = -e_3$. Osserviamo che W è ortogonale a e_3 e quindi se $R(W) = W$ quindi $g = h = 0$. Quindi la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

che rappresenta la restrizione di R a W è una matrice ortogonale di determinante -1 ovvero ad una riflessione. L'asse di questa riflessione è anche l'asse ℓ della rotazione e quindi abbiamo che $\ell \subset W$ e che l'angolo di rotazione è pari a π radianti.

Quindi esistono due possibili casi: $\ell = \mathbb{R}e_3$ o $\ell \subset W$. In entrambe i casi $\theta = \pi$.

Soluzione esercizio 4. Una base del sottospazio in questione e' data da $v_1 = e_1 - e_2$, $v_1 = e_1 - e_3$, $v_1 = e_1 - e_4$. La matrice associata alla restrizione di b a W rispetto alla base v_1, v_2, v_3 ha entrate uguali a $b(v_i, v_j)$. Effettuando il calcolo otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolo il determinante dei minori 1×1, 2×2, 3×3 a partire da quello in basso a destra. Ottengo i valori $-1, 1, 4$. Quindi per il criterio di Sylvester la restrizione di b a W ha segnatura $(1, 2, 0)$.