0.1. **Indicazioni per lo studio e per gli esercizi per casa.** Sabato 14 ottobre: potete fare gli esercizi 2.4, tutti quelli sui numeri complessi, tutti quelli sulle matrici (soprattutto il 3.1). Potete fare anche gli esercizi 1a, 1c (nell'1b c'è un errore nel testo), 2a, 2b, 4 a pagina del libro.

Sabato 21 ottobre: il materiale di questa ultima settimana lo trovate nella sezione 1.2 del libro e nelle note del corso in rete sui sistemi lineari. Potete fare gli esercizi 4.5, 4.6, 5.1, 5.2, 5.3 e gli esercizi 8 e 9 a pagina 32 e l'esercizio 1 e 2 a pagina 49 del libro (dove trovate scritto risolvete il sistema usando Gauss Jordan, potete leggere risolvete riducendo il sistema a scalini come abbiamo fatto in classe).

Sabato 28 ottobre: il materiale di questa ultima settimana lo trovate nella sezione 1.1 e 1.4 del libro. Trovate inoltre le note delle lezioni in rete. Potete fare gli esercizi 2.5, 4.7, 4.8, 5.4, 6.1, 6.2, 6.3, del foglio degli esercizi e l'esercizio 4 a pagina 48 del libro.

Sabato 4 novembre: il materiale di questa ultima settimana lo trovare nella sezione 1.4 del libro. Trovate inoltre le note delle lezioni in rete. Potete fare gli esercizi 2.6, 6.4, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6 e gli esercizi 1, 2, 3 a pagina 67 del libro.

Sabato 11 novembre: il materiale di questa ultima settimana lo trovate sempre nella sezione 1.4 del libro. Tuttavia la dimostrazione del teorema che dice che tutte le basi hanno la stessa cardinalità che abbiamo dato in classe è abbastanza diversa e spero più concreta di quella che trovate sul libro. Potete fare gli esercizi 7.7, 7.8, 7.9, 7.10, 8.1, 8.2, 8.3 e gli esercizi 8, 9, 12 a pagina 68 del libro.

Sabato 18 novembre: il materiale di questa ultima settimana lo trovate nella sezione 1.4 e nella sezione 1.11 del libro. Trovate inoltre le note delle lezioni in rete. Potete fare gli esercizi 7.11, 8.4, 8.5, 8.6, 9.1, 9.2, e l'esercizio 1 a pagina 146 del libro.

Sabato 25 novembre: il materiale di questa ultima settimana lo trovate nella sezione 1.11 e 1.12 del libro. Trovate inoltre le note delle lezioni in rete. Potete fare gli esercizi 7.12, 7.13, 8.7, 9.3, 9.4, 9.5, 9.8, 10.1, 10.2 e l'esercizio 1 a pagina 159 del libro. Si consiglia di fare almeno il 9.5.

Sabato 2 dicembre: il materiale di questa ultima settimana lo trovate nella sezione 1.13 del libro. Potete fare gli esercizi 9.11, 9.12, 10.3, 10.4, gli esercizi 7 e 8 a pagina 92 del libro e gli esercizi 2,3,4,5,6,7 a pagina 162 del libro (esercizio 4 a parte questa ultima lista di esercizi sono tutti molto simili uno all'altro).

Sabato 9 dicembre: il materiale di questa ultima settimana lo trovate nella sezione 1.13 del libro. Potete fare gli esercizi 11.1, 11.2, 11.3, 12.1, 12.2, 12.3.

Sabato 16 dicembre: il materiale di questa ultima settimana lo trovate nella sezione 1.13. Potete fare uno qualsiasi degli esercizi tranne quelli sul duale che trovate nei compitini.

1. Richiami

Questi esercizi riguardano argomenti che nel corso sono stati solo velocemente richiamati durante la prima settimana e che il corso presuppone noti dalle superiori. Si tratta di qualche nozione di calcolo proposizionale, di insiemistica, di trigonometria e coordinate polari. Agli esercizi che trovate sotto potete aggiungere gli esercizi 1,2,3,4,25,26,28,29,31 del capitolo 1 del libro Analisi Matematica ABC o gli esercizi sui richiami di trigonometria e insiemi del libro "Un primo corso di analisi matematica".

Esercizio 1.1. In una classe di Ingegneria meccanica di 250 studenti tutti hanno almeno dato un esame tra analisi, geometria e fisica al primo appello utile. 150 hanno dato analisi, 100 geometria, 75 fisica, 25 sia geometria che analisi e 15 tutti e tre gli esami. Gli studenti che hanno dato sia geometria che fisica hanno dato anche analisi. Quanti sono gli studenti che hanno dato almeno due esami?

Esercizio 1.2. Sia

$$A = \{1, 2, 3, 5\} \qquad B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 9 \text{ o } x^2 = 16\} \quad \text{e} \quad C = \{4, 6, 7\}$$

Si descrivano gli insiemi

$$A \smallsetminus B \qquad C \times (A \smallsetminus B) \qquad (A \times B) \cap (C \times B).$$

elencandone gli elementi.

Esercizio 1.3. Negare le seguenti frasi:

ogni giorno dell'anno piove;
esiste un uomo alto più di due metri.

Esercizio 1.4. Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari senza usare la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 3\pi/2 \qquad \rho = 3, \alpha = 5\pi/4 \qquad \rho = 2, \alpha = -\pi/3 \qquad \rho = 4, \alpha = -\pi/6$$

Esercizio 1.5. Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane senza usare la calcolatrice

$$(-2, -2), \qquad (3, -3\sqrt{3}), \qquad (-1, 1)$$

Esercizio 1.6. Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari usando la calcolatrice

$$\rho = 5, \alpha = 1,1 \qquad \rho = 3, \alpha = \pi/7 \qquad \rho = 2, \alpha = 2 \qquad \rho = 4\sqrt{3}, \alpha = -\pi/9$$

Esercizio 1.7. Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane usando la calcolatrice

$$(-2, -3), \qquad (3, 5), \qquad (4, 1)$$

Esercizio 1.8. Scrivere il numero $1,2\overline{345}$ come frazione. Scrivere la frazione $11/7$ come numero con la virgola.

2. Esercizi vari

Esercizio 2.1. Sia S una sfera di raggio 1 e sia C un cono a base circolare e con altezza passante per il centro della base, circoscritto alla sfera. Sapendo che la base del cono ha area uguale a 4π calcolare il volume.

Esercizio 2.2. Si dimostri che esistono infiniti numeri primi procedendo nel seguente modo: si supponga per assurdo che siano in numero finito e che siano $p_1, \dots, p_n$ si consideri il numero $m = p_1 \cdots p_n + 1$ e si osservi che questo numero non è divisibile per nessuno dei numeri precedenti.

Esercizio 2.3. Sia dato un cubo di lato 1.

(1) Quanto è lunga la strada più corta lungo la superficie del cubo per andare da un vertice al vertice opposto?
(2) Si considerino 4 vertici del cubo A, B, C, D non adiacenti (non appartenenti ad uno stesso spigolo). Calcolare il volume del solido i cui vertici sono A, B, C, D.

Esercizio 2.4. Siano dati i tre punti del piano cartesiano di coordinate $(2, 3)$, $(7, 1)$, $(5, 4)$. Calcolare area, perimetro e angoli del triangolo da essi individuato.

Esercizio 2.5. Siano dati i punti $(1, 2, 3)$, $(3, 4, 5)$, $(7, 1, 0)$. Calcolare area, perimetro e angoli del triangolo da essi individuato.

Esercizio 2.6. Calcolare il volume del tetraedro che ha come vertici i punti $(1, 0, 1)$, $(1, 2, -3)$, $(1, 1, 1)$, $(3, 1, 1)$.

3. Numeri complessi

Esercizio 3.1. Calcolare $(1 + i)^2$. Calcolare $(3 + 4i) \cdot (3 - 2i)$.

Esercizio 3.2. Sia $z = 3 + 4i$ e $w = 7 - 3i$. Calcolare $\bar{z}/w$ e $z \cdot \bar{w}$.

Esercizio 3.3. Verificare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $\bar{\bar{z}} = z$.

Esercizio 3.4. Calcolare le radici quadrate complesse dei seguenti numeri:

$$37, \quad -169, \quad ,9i, \quad -\frac{3}{4} + i, \quad 3 + 7i.$$

(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

Esercizio 3.5. Risolvere le seguenti equazioni dove z è un numero complesso

$$(1 + i)z + 14 = 0, \quad z^2 + 5z + 10 = 0, \quad (1 + i)z^2 + \sqrt{3}z - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = 0$$

(ogni tanto vi verranno dei numeracci)

Esercizio 3.6. Calcolare le radici quarte di -16. Calcolare le radici ottave di 1.

Esercizio 3.7. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = \bar{z}^3$.

Esercizio 3.8. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{z-i}{z+i}$$

è un numero reale.

Esercizio 3.9. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{|z-i|}{|z+i|}=2.$$

Esercizio 3.10. Si verifichi che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$
$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$$

Esercizio 3.11. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $e^z = e$.

Esercizio 3.12. Risolvere le seguenti equazioni, dove $z \in \mathbb{C}$:

$$(z-\bar{z})^3 = i \qquad z^2 + (i-1)z - i = 0 \qquad z^3 = iz\bar{z}$$

Esercizio 3.13. Calcolare $(1-i)^{24}$. Risolvere $z^3 = arg\,(z) + \frac{\pi}{6}$ e $z|z| = 2\,Re\,(z)$.

Esercizio 3.14 (Daddi)**.** Si determini il valore del parametro reale k in modo che l'equazione $z^2 + (3 + k\,i)\,z = 8 - 9\,i$ abbia, tra le sue soluzioni, il numero complesso $2 - i$. Si determini poi l'altra soluzione dell'equazione.

Esercizio 3.15 (Daddi)**.** Assegnata l'equazione

$$3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{368} z - 18 + \frac{k}{z} = 0$$

dove k un parametro reale, si determinino gli eventuali valori di k in modo che le soluzioni siano non reali ed abbiano modulo uguale a $\sqrt{10}$.

Esercizio 3.16 (Daddi)**.** Tra i numeri complessi della forma

$$z = k + 1 + i\,(2\,k - 3)$$

dove k un numero reale, determinare quello avente modulo minimo.

Esercizio 3.17 (Daddi)**.** Si disegni nel piano complesso l'insieme rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} |\mathrm{Im}(z - 2 + 4\,i)| \leqslant 1 \\ |z - 1 + 3\,i| > 3\,. \end{cases}$$

Esercizio 3.18. Risolvere l'equazione $e^{3z} + 5e^{2z} + 7e^z = 0$.

Esercizio 3.19. Trovare tutte le $z, w \in \mathbb{C}$ che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} z\bar{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.20 (Daddi)**.** Pierino, dopo vari anni di tentativi poco fruttuosi, si sta finalmente appassionando alla matematica; purtroppo oggi ha perso il foglio sul quale aveva scritto gli appunti della lezione. Appena arrivato a casa, prova a ricostruire un esercizio svolto dal professore; si ricorda che si trattava di determinare le soluzioni di un'equazione della forma $2\,z^3 + ...\,z^2 + ...\,z + ... = 0$, dove al posto dei puntini ci sono dei numeri reali. Pierino ricorda anche che, tra le soluzioni dell'equazione, ci sono -2 e $-1 + 4\,i$. Si dica qual l'equazione che il professore ha scritto alla lavagna.

Esercizio 3.21. Sia $w = e^{\frac{2\pi\,i}{n}}$, allora $w^{n-1} + w^{n-2} + \cdots + w + 1 = 0$.

Esercizio 3.22. Sia a, b, c tre numeri complessi. Dimostrare che a, b, c sono i vertici di un triangolo equilatero se e solo se

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

Esercizio 3.23. Siano a, b, c, d quattro numeri complessi. Il loro birapporto è definito come

$$bir(a, b, c, d) = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}.$$

Fissati tre punti distinti a, b, c nel piano complesso, non allineati mostrare che il luogo degli z tali che $bir(a, b, c, z)$ è un numero reale è il cerchio passante per a, b, c.

Esercizio 3.24. Si trovi una formula per l'ennessimo termine della successione x_n definita nel modo seguente:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}.$$

Esercizio 3.25. Dai $a, b, c \in \mathbb{C}$ trovare una equazione polinomiale in a, b, c che dica quando il triangolo che ha come vertici a, b, c sia isocele e rettangolo in a.

4. Matrici

Esercizio 4.1. Siano date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare i prodotti $A \cdot A$, $B \cdot C$.
(2) Si può eseguire il prodotto $A \cdot D$? E il prodotto $D \cdot A$? calcolare quello dei due che si può eseguire.
(3) Calcolare $AB - BA$ e $BC - CB$.
(4) Calcolare $D \cdot G$ e $G^2 + G = G \cdot G + G$.
(5) Calcolare A^{101}.
(6) Calcolare $H \cdot G$ e $G \cdot H$.
(7) se M è una matrice $m \times 3$ e N è una matrice $3 \times n$ descrivere il prodotto $H \cdot N$ e $M \cdot H$.

Esercizio 4.2. È vero che se A e B sono matrici 2×2 e $A \cdot B = 0$ allora $A = 0$ o $B = 0$. Dimostrare che è vero o esibire un controesempio.

Esercizio 4.3. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tali che $ad - bc \neq 0$. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

Esercizio 4.4. Sia data la matrice a coefficienti complessi:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supponiamo che esista una matrice 2×2, B tale che $A \cdot B = I_2$. Si dimostri che $ad - bc \neq 0$ e che B è uguale alla matrice scritta nell'esercizio precedente.

Esercizio 4.5. (1) Si dimostri che se A è una matrice 3×2 a coefficienti reali e non nulla, allora $Tr(A \cdot A^t) > 0$.
(2) Si dimostri che se A è una matrice $m \times n$ a coefficienti reali e non nulla allora $Tr(A \cdot A^t) > 0$.

Esercizio 4.6. Si cosideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli $Tr(A^{1001})$.

Esercizio 4.7. Sia A una matrice $m \times m$ invertibile. Dimostrare che A^t è invertibile e che $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Esercizio 4.8. Siano A e B due matrici $m \times m$ invertibili. Dimostrare che AB è invertibile e che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5. Sistemi lineari

Esercizio 5.1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2\,x_2 + 2\,x_3 + 6\,x_4 + x_5 = 7 \\ 2\,x_1 + x_2 + 7\,x_3 + 11\,x_4 = 4 \\ x_1 + 3\,x_3 + 4\,x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

(1) Scrivere la matrice e la matrice completa associate al sistema lineare
(2) Ridurre la matrice a scalini.
(3) Calcolare il rango della matrice associata e della matrice completa
(4) Descrivere le soluzioni del sistema

Esercizio 5.2. Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = c^2 + 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = c^2 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

(1) calcolare il rango della matrice associata al sistema
(2) calcolare il rango della matrice completa associata al sistema
(3) per quali c il sistema ha soluzione? e quando ha soluzione quante soluzioni ha?

Esercizio 5.3. Sia A una matrice $m \times n$ tale che per ogni b il sistema $Ax = b$ ha esattamente una soluzione. Dimostrare che $m = n$ e che il rango di A è uguale a n.

Esercizio 5.4. Si calcoli l'inversa, se esiste, delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Spazi e sottospazi vettoriali

Esercizio 6.1. Completare la dimostrazione che se K è un campo allora K^n con con somma, prodotto per scalare e zero definiti in classe è uno spazio vettoriale.

Esercizio 6.2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Dimostrare che per ogni $v \in V$ e per ogni $a \in K$, $0 \cdot v = 0_V$ e che $a \cdot 0_V = 0_V$.

Esercizio 6.3. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Quali sono sottospazi vettoriali?

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 0\} \\ W &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y = 1\} \\ X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0 \text{ e } u \geqslant 0\} \\ Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + 4y^2 = 0\} \end{aligned}$$

Esercizio 6.4. Si dimostri che se U e W sono due sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale V allora $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V.

7. Basi, generatori e vettori linearmente dipendenti

Esercizio 7.1. Trovare una base del sottospazio $x - y + 3z = 0$ di $\mathbb{C}^3$. Scrivere le coordinate di $(1, 4, 1)$ rispetto alla base scelta. Si completi la base del sottospazio ad una base di $\mathbb{C}^3$.

Esercizio 7.2. Sia X un insieme finito e K un campo e sia $V = \mathcal{F}_K(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni da X in K definito in classe. Per ogni $x \in X$ sia δ_x la funzione definita nel modo seguente:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x; \\ 0 & \text{se } y \neq x. \end{cases}$$

Dimostrare che se $x_1, \dots, x_n$ sono gli elementi di X allora $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$ è una base di $\mathcal{F}_K(X)$.

Esercizio 7.3. Descrivere una base delle spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

Esercizio 7.4. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ dei vettori linearmente indipendenti. Sia $v \in V$. Dimostrare che $v_1, \dots, v_n, v$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Esercizio 7.5. Si dimostri che i seguenti polinomi sono una base di $\mathbb{C}[t]_{\leqslant 2}$: $f_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)$, $f_2(t) = \frac{1}{2}t(t-1)$, $f_3(t) = -t(t-2)$. Sia $f = t^2$, scrivere le coordinate di f rispetto a f_1, f_2, f_3. Se f è un polinomio qualsiasi quali sono le coordinate di f rispetto alla base f_1, f_2, f_3. (C'è un modo molto sintetico ed efficace per farlo)

Esercizio 7.6. Si dimostri che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se esiste i tale che v_i è una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$.

Esercizio 7.7. Si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che sono una base di $\mathbb{R}^4$ e si calcolino le cordinate dei seguenti vettori rispetto a questa base:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.8. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Si determini una base di W, e si calcoli la dimensione di W e si descriva W tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in W:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Per i vettori w_i che stanno in W si determinino le cordinate rispetto alla base scelta

Esercizio 7.9. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{C}^5$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Si determini una base di W, e si calcoli la dimensione di W e si descriva W tramite equazioni. Dire tra i seguenti vettori quali stanno in W:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2i+1 \\ -1 \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}$$

Esercizio 7.10. Si dimostri che lo spazio vettoriale dei polinomi $V = \mathbb{R}[t]$ non ha dimensione finita.

Esercizio 7.11. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si consideri il sottospazio $W = \{x \in K^5 \ : \ A \cdot x = 0\}$. Se ne calcoli la dimensione e se ne determini una base.

Si ricorda che le matrici simmetriche sono le matrici A tali che $A^t = A$ mentre le matrici antisimmetriche sono le matrici A tali che $A^t = -A$.

Esercizio 7.12. Sia W lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche a coefficienti complessi 2×2. Se ne trovi una base e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 7.13. Sia W lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche a coefficienti complessi $n \times n$. Se ne trovi una base e se ne calcoli la dimensione.

8. Somma e intersezione di sottospazi

Esercizio 8.1 (I compitino 2015-2016)**.** Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$. Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A) $\dim(U + W) = 8$ qualsiasi siano U e W.
B) $\dim(U \cap W) = 2$ qualsiasi siano U e W.
C) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 8$.
D) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.
E) Se $\dim U + W = 8$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.

Esercizio 8.2 (Compito 6 giugno 2016)**.** Siano V e W due sottospazi di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$. Quali sono le possibili dimensioni del sottospazio $V \cap W$? Motiva la risposta in modo completo.

Esercizio 8.3. Siano U e W due sottospazi di V. Si dimostri che se $U \cup W$ è un sottospazio allora $U \subset W$ o $W \subset U$.

Esercizio 8.4. Completare la dimostrazione della proposizione enunciata in classe nella quale abbiamo formulato varie condizioni equivalenti per dei sottospazi $U_1, \dots, U_h$ per essere in somma diretta.

Esercizio 8.5. Sia $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Sia $S = \{X \in V \ : \ X^t = X\}$ e sia $A = \{X \in V \ : \ X^t = -X\}$. Si dimostri che $V = S \oplus A$.

Esercizio 8.6. Sia $W = \{x \in \mathbb{C}^5 \ : \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$. Si trovino tre sottospazi X e Y e Z diversi da zero, di W tali che $W = X \oplus Y \oplus Z$.

Esercizio 8.7. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e sia X, Y, Z dei sottospazi di dimensione 3 di V. Sia $a = \dim X \cap Y$, $b = \dim X \cap Z$, $c = \dim Y \cap Z$ e $d = \dim X \cap Y \cap Z$.

(1) si dimostri che $a = 2$ o 3;
(2) si dimostri che non può essere $d = 0$;
(3) di esibiscano X, Y, Z tali che $d = 2$;
(4) di esibiscano X, Y, Z tali che $d = 1$;
(5) si descrivano tutte le quadruple (a, b, c, d) che si possono ottenere al variare di X, Y, Z.

9. Applicazioni lineari

Esercizio 9.1. Quali delle seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ è una applicazione lineare?

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z + y \\ 5y \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z \\ x \end{pmatrix} \qquad h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - e^y \\ z + x \end{pmatrix} \qquad c\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad d\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.2. Sia $V = \mathbb{C}[t]$ e siano $G : V \longrightarrow V$, $G : V \longrightarrow \mathbb{C}^3$ e $H : \mathbb{C}^3 \longrightarrow V$ definite nel modo seguente:

$$F(p(t)) = (t^2 - 5t)p(t) \qquad G(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(3) \\ p(7) \end{pmatrix} \qquad H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(t-1) + y(t-3) + z(t-7) + (t-8)$$

(1) dire quali tra F, G, H sono lineari.
(2) dire quali tra F, G, H sono iniettive?
(3) dire quali tra F, G, H sono surgettive?
(4) Determinare $G \circ H$ e $F \circ H$.

Esercizio 9.3 (Compitino febbraio 2017)**.** a) Si enunci il teorema della dimensione.
b) Esistono due applicazioni lineari

$$f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad g \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che la loro composizione $g \circ f$ sia iniettiva? Motivare la risposta.

Esercizio 9.4 (Compito luglio 2017)**.** Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare con $\dim N(T) = 1$ e sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 4
a) dimostrare che $W \cap \mathrm{Im}(T) \neq 0$;
b) quali sono le possibili dimensioni di $W \cap \mathrm{Im}(T) \neq 0$? motivare la risposta

Esercizio 9.5. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 3}$ e sia $F : V \longrightarrow V$ definita da $F(p(t)) = p'(t) + p(t+1)$. Si verifiche che è una applicazione lineare e si calcoli la matrice associata a F rispetto alla base standard di V in partenza e in arrivo.

Esercizio 9.6 (Compitino febbraio 2017)**.** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x+y+z=0$ e sia V il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in 1: $V = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} \,:\, p(1) = 0\}$. Sia $F : W \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2\,y\,t + z\,t^2 + (x+z)t^3$$

(per esempio $F(1,-1,0)$ è il polinomio $1 - 2t + t^3$)
a) Si scelga una base di W e una di V e si scriva la matrice associata a F rispetto a queste basi.
b) Sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ l'applicazione lineare tale che

$$G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + t \qquad \text{e} \qquad G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Scrivere la matrice associata a G rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$.

Esercizio 9.7 (Compito luglio 2017)**.** Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $2x + z = 0$, sia E lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia $T : W \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x + 2z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Sia inoltre $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \quad \text{e} \quad S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) scegliere una base di W e una di E e scrivere la matrice associata a T rispetto a queste basi.
b) scrivere la matrice associata ad S rispetto alla basi standard di $\mathbb{R}^3$ ed E.

Esercizio 9.8. Sia $E_1 = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e sia $E_2 = \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e sia $T : E_1 \longrightarrow E_2$ l'applicazione $T(X) = X \cdot A$.
(1) si dimostri che T è una applicazione lineare;

(2) si scelgano basi di E_1 ed E_2 e si scriva la matrice associata a T rispetto a queste basi.

Esercizio 9.9 (Compitino febbraio 2016)**.** Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $L_k : V \longrightarrow V$ definita da

$$L_k\big(p(t)\big) = p(t+1) - k\,p(t)$$

per ogni polinomio $p(t)$.

a) Si scelga una base di V e si determini la matrice associata ad L_k rispetto a tale base;
b) Si determini il rango di L_k al variare del parametro k;
c) Sia $f(t)$ il polinomio $f(t) = t^2 + 1$ si determini al variare di k se esistono polinomi $p(t)$ tali che $L_k\big(p(t)\big) = f(t)$.

Esercizio 9.10. Sia data la seguente matrice 2×2:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) si determini un vettore non nullo v_1 di $\mathbb{R}^2$ tale che $L_M(v_1) = 2v_1$;
(2) si determini un vettore non nullo v_2 di $\mathbb{R}^2$ tale che $L_M(v_2) = 3v_2$;
(3) si calcoli M^{100}.

Esercizio 9.11. Sia U, V, W, X quattro spazi vettoriali di dimensione finita, e siano $A : U \longrightarrow V$, $B : V \longrightarrow W$ e $C : W \longrightarrow X$ tre applicazioni lineari. Si dimostri che

(1) se A è surgettiva allora $Rango(B \circ A) = Rango(B)$.
(2) se C è iniettiva allora $Rango(C \circ B) = Rango(B)$.

Esercizio 9.12 (Compito 5 giugno 2017)**.** Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Dire se esistono due basi u_1, u_2, u_3 e v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{v_1,v_2,v_3}$ è diagonale.
b) Dire se esiste una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $[F]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,v_3}$ è diagonale.

10. Determinanti

Esercizio 10.1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici, riducendole a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici applicando la formula di Laplace

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.3. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant n-1}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o oguale a $n-1$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Si consideri la seguente applicazione lineare $F : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$$F(p(t)) = (p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots p(\lambda_n))$$

Si dimostri che è iniettiva se e solo se i numeri λ_i sono distinti. Se ne deduca che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\ & \ldots & & & & \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \ldots & \lambda_i^{n-2} & \lambda_i^{n-1} \\ & \ldots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se due dei numeri λ_i sono uguali.

Esercizio 10.4 (I compitino 2016)**.** Sia B la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriali delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $T : E \longrightarrow E$ l'applicazione definita da $T(X) = B \cdot X$

a) Si determinino nucleo e immagine di T.
b) Si determini una base di E e si calcoli la matrice associata a T rispetto a questa base.
c) Si calcoli il determinante di T.

11. Autovalori e autovettori

Esercizio 11.1. Sia V uno spazio vettoriale complesso. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che $F^4 = Id$. Si dimostri che se λ è un autovalore di F allora $\lambda^4 = 1$

Esercizio 11.2. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare e sia $\sqrt{2}$ un autovalore di F. Si dimostri che 6 è un autovalore di $F^4 + F^2$.

Esercizio 11.3. Si calcolino gli autovalori delle applicazioni L_A assiciate alle seguenti matrici:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11.4 (I compitino 2017)**.** Sia A la matrice 13×13 con tutte le entrate uguali a 1.

a) Si determini una base del nucleo di L_A.
b) Si determini un autovettore con autovalore diverso da zero (si provi ad indovinare!).
c) Si determini una base di autovettori per L_A e si calcoli il polinomio caratteristico di L_A.

12. Diagonalizzabilità

Esercizio 12.1. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione diagonalizzabile. Si dimostri che F^2 è diagonalizzabile e che $2F$ è diagonalizzabile.

Esercizio 12.2. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti complessi. Si consideri l'applicazione lineare $F : V \longrightarrow V$ definita nel seguente modo:
$$F(p(t)) = p(0)x^2 + p'(x)$$

a) Si determinino gli autovalori di F.
b) Si determini una base di autovettori.
c) Si calcoli F^{15}

Esercizio 12.3. Sia A una matrice 5×5 triangolare superiore che ha lungo la diagonale tutte le entrate uguali a 2. Si dimostri che A è diagonalizzabile se e solo se $A = 2\,I$.

Esercizio 12.4 (Compito 9 gennaio 2017)**.** Sia V uno spazio vettoriale sui numeri complessi di dimensione finita e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Sia λ un autovalore di F. Si dia la definizione di molteplicità geometrica e molteplicità algebrica di λ rispetto a F.
b) Supponiamo che $\dim V = 4$. Si dimostri che se la molteplicità geometrica di 2 è uguale a 4 allora $F = 2\,Id$.

Esercizio 12.5. Sia V uno spazio vettoriale e sia $F : V \longrightarrow V$ tale che $F^2 = F$. Dimostrare che F è diagonalizzabile.

Esercizio 12.6. Costruisci una matrice A di taglia 3×3 tale che l'applicazione $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfi entrambe le proprietà seguenti:

- l'immagine di L_A è il piano definito da $x + y = 0$;
- l'endomorfismo L_A non è diagonalizzabile.

Esercizio 12.7 (II compitino 2016)**.** Determinare per quali valori $t \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile:
$$\begin{pmatrix} t-1 & 2t & t \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2 & t+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2016: prima parte

Istruzioni: Avete 30 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo il risultato o la lettera della risposta corretta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Sia $z = 1 + i$ e $w = 2 + i$. Calcolare z/w.

Risposta: $z/w =$

Domanda 2. Calcolare il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risposta: $\det A =$

Domanda 3. Sia $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ una applicazione lineare di rango 3. Determinare la dimensione del nucleo di L.

Risposta: $\dim \ker L =$

Domanda 4. Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$. Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A) $\dim(U + W) = 8$ qualsiasi siano U e W.
B) $\dim(U \cap W) = 2$ qualsiasi siano U e W.
C) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 8$.
D) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.
E) Se $\dim U + W = 8$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.

Risposta: L'affermazione sicuramente vera è la

Domanda 5. Si determini la dimensione dello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_{5\times 3}(\mathbb{R})$

Risposta: La dimensione di $\mathrm{Mat}_{5\times 3}(\mathbb{R})$ è uguale a

Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2016: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Si definisca cosa è $\ker T$, il nucleo di T.
b) Si dimostri che se $\ker T = \{0\}$ allora T è iniettiva.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $L_k : V \longrightarrow V$ definita da

$$L_k\big(p(t)\big) = p(t+1) - k\,p(t)$$

per ogni polinomio $p(t)$.

a) Si scelga una base di V e si determini la matrice associata ad L_k rispetto a tale base;
b) Si determini il rango di L_k al variare del parametro k;
c) Sia $f(t)$ il polinomio $f(t) = t^2 + 1$ si determini al variare di k se esistono polinomi $p(t)$ tali che $L_k\big(p(t)\big) = f(t)$.

Esercizio 3. Sia B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriali delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $T : E \longrightarrow E$ l'applicazione definita da $T(X) = B \cdot X$

a) Si determinino nucleo e immagine di T.
b) Si determini una base di E e si calcoli la matrice associata a T rispetto a questa base.
c) Si calcoli il determinante di T.

Esercizio 4. Sia C la matrice

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini un vettore non nullo $v_1 \in \mathbb{R}^2$ tale che $C \cdot v_1 = 3v_1$.
b) Si determini un vettore non nullo $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tale che $C \cdot v_2 = -9\,v_2$.
c) Si calcoli C^{100}.

A Compitino di algebra lineare del 21 febbraio 2017: prima parte

Istruzioni: Avete 25 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente a tutte e 5 le domande.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Si determinino tutti i numeri complessi z tali che $|z|^2 = 2$ e $Re(z) = Im(z)$.

Risposta:

Domanda 2. Si calcoli il polinomio caratteristico della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Risposta: $p_A(t) =$

Domanda 3. Sia data la seguente base di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Sia $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ la base duale. Si calcoli φ_2.

Risposta: $\varphi_2 \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} =$

Domanda 4. Sia $F : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ una applicazione lineare tale che $\dim N(F) = 2$. Calcolare il rango di F.

Risposta: rango $(F) =$

Domanda 5. Siano U e W sottospazi dello spazio vettoriale V delle matrici 2×2: $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}$. Se $U + W = V$, $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim W = 2$ quale è la dimensione di U?

Risposta: $\dim U =$

Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2017: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

a) Si enunci il teorema della dimensione.
b) Esistono due applicazioni lineari

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che la loro composizione $g \circ f$ sia iniettiva? Motivare la risposta.

Esercizio 2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + y + z = 0$ e sia V il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in 1: $V = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} \, : \, p(1) = 0\}$. Sia $F : W \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da

$$F \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x + 2\,y\,t + z\,t^2 + (x+z)t^3$$

(per esempio $F(1, -1, 0)$ è il polinomio $1 - 2t + t^3$)

a) Si scelga una base di W e una di V e si scriva la matrice associata a F rispetto a queste basi.
b) Sia $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ l'applicazione lineare tale che

$$G \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 + t \qquad \text{e} \qquad G \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = F \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{se} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in W.$$

Scrivere la matrice associata a G rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$.

Esercizio 3. Si determinino tutti gli z complessi tali che $z^4 \bar{z} = 32$.

Esercizio 4. Sia A la matrice 13×13 con tutte le entrate uguali a 1.

a) Si determini una base del nucleo di L_A.
b) Si determini un autovettore con autovalore diverso da zero (si provi ad indovinare!).
c) Si determini una base di autovettori per L_A e si calcoli il polinomio caratteristico di L_A.